ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

AUTOREFERÁT
DIZERTAČNEJ PRÁCE

Žilina, apríl 2016

Ing. Ján Bendík

Žilinská univerzita v Žiline
Fakulta riadenia a informatiky

Ing. Ján Bendík

Autoreferát dizertačnej práce

Navrhovanie verejných obslužných systémov s exaktným optimalizačným jadrom

na získanie akademického titulu **„Philosophiae doctor“ (v skratke PhD.)**
v študijnom programe doktorandského štúdia
aplikovaná informatika

v študijnom odbore:
9.2.9 aplikovaná informatika

Žilina, apríl 2016

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia **na Katedre matematických metód a operačnej analýzy, Fakulte riadenia a informatiky Žilinskej univerzity v Žiline.**

Predkladateľ: **Ing. Ján Bendík**
Katedra matematických metód a operačnej analýzy
Fakulta riadenia a informatiky
Žilinská univerzita v Žiline

Školiteľ: **Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.**
Katedra matematických metód a operačnej analýzy
Fakulta riadenia a informatiky
Žilinská univerzita v Žiline

Oponenti:

Autoreferát bol rozoslaný dňa: ....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o .... h. pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce schválenou odborovou komisiou v študijnom odbore **9.2.9 Aplikovaná informatika**, **v študijnom programe Aplikovaná informatika** vymenovanou dekanom Fakulty riadenia a informatiky Žilinskej univerzity v Žiline dňa ....

Prof. Ing. Martin Klimo, PhD.
predseda odborovej komisie
študijného programu Aplikovaná informatika
v študijnom odbore 9.2.9 Aplikovaná informatika

Fakulta riadenia a informatiky
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1
010 26 Žilina

1. ÚVOD

V reálnych situáciách sa stretávame s rôznymi obslužnými systémami, ktoré sa stali súčasťou nášho života. Podľa [27] sa obslužný systém chápe ako sústava na seba nadväzujúcich dopravných, výrobných, manipulačných aj informačných činností slúžiacich na zabezpečenie potrieb zákazníkov v danom mieste a čase zo zdrojov obsluhy, pomocou ktorých možno ich potreby uspokojiť. Obslužné systémy môžeme rozdeliť na súkromné obslužné systémy a verejné obslužné systémy. Pri verejných obslužných systémoch platí, že služba musí byť dostupná pre všetkých zákazníkov. Pri súkromných obslužných systémoch je hlavným cieľom maximalizácia zisku majiteľa systému. To môže viesť k minimalizácii nákladov na uspokojenie požiadaviek časti zákazníkov, teda tých, z ktorých je nejaký zisk. Potreba návrhu rôznych obslužných systémov vyplýva zo vzniku nových potrieb alebo zo zmien vonkajších podmienok. V návrhu obslužného systému vystupuje množina zákazníkov a množina kandidátov na umiestnenie stredísk. Vyberajú sa strediská z množiny kandidátov a priradzujú sa im zákazníci, ktorí sú zväčša rozptýlení v rámci obsluhovaného územia. Obsluha zákazníka sa vždy uskutočňuje z najbližšieho strediska. Najčastejšou úlohou návrhu verejného obslužného systému je určenie optimálneho rozmiestnenia stredísk. Určenie optimálneho rozmiestnenia stredísk je rozsiahla kombinatorická úloha s využitím poznatkov z matematického programovania, ktorá patrí do kategórie NP-ťažkých úloh [25], [26]. V úlohe návrhu verejného obslužného systému je možné kvalitu riešení vyhodnocovať pomocou rôznych kritérií. Systémové kritérium zohľadňuje minimalizáciu súčtu nákladov spojených s vybudovaním stredísk a obsluhou zákazníkov. Minimaxové kritérium zohľadňuje polohu najhoršieho zákazníka k najbližšiemu stredisku. Kritérium solidárnosti zohľadňuje férovosť zabezpečenia obsluhy zákazníka. V praxi to znamená, že ak nie je služba dostupná z najbližšieho umiestneného strediska, bude služba dostupná z druhého najbližšieho umiestneného strediska obsluhy. Návrh verejného obslužného systému môže obsahovať rôzne obmedzenia. Tieto obmedzenia závisia od špecifikácie obslužného systému. Z ekonomického alebo technologického hľadiska môže týmto obmedzením byť napríklad obmedzenie počtu vybudovaných stredísk obsluhy. Toto obmedzenie môžeme považovať za kapacitné obmedzenie, kedy nám finančné prostriedky neumožňujú vybudovať viac stredísk.

Dizertačná práca sa zaoberá metódami návrhov verejného obslužného systému s využitím informatických prostriedkov. Tento návrh verejného obslužného systému spočíva v riešení umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk.

Mojim vedeckým cieľom spojeným s riešením spomenutej úlohy je zistiť do akej miery je možné a výhodné využiť k riešeniu Erlenkotterov prístup, ktorý bol v minulosti úspešne použití na riešenie kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy. Tento prístup realizujem pomocou metódy vetiev a hraníc so špeciálnym prístupom k výpočtu dolnej hranice. Budem sa snažiť zovšeobecniť Erlenkotterov prístup na prípad umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk, analyzovať možné prístupy k riešeniu príslušnej umiestňovacej úlohy, navrhnúť účinné algoritmy pre ich realizáciu, implementovať ich a vykonať výskum ich správania.

2. SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY

Kapitola popisujúca súčasný stav riešenej problematiky začína matematickou formuláciou umiestňovacej úlohy. Následne sú popísané modifikácie umiestňovacej úlohy s ohľadom na možné kritéria kvality. Spomedzi najznámejších úloh návrhu verejného obslužného systému uvádzam matematické modely úlohy p-mediánu, úlohy váženého p-mediánu, úlohy p-centra, umiestňovacej úlohy s lexikografickým min-max kritériom, kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy a úlohy návrhu distribučného systému.

V druhej časti uvádzam prehľad exaktných a semi-exaktných metód riešenia umiestňovacej úlohy príp. jej modifikácii. Exaktné metódy riešenia umožňujú získať optimálne riešenie zvolenej úlohy. Semi-exaktné metódy poskytujú zväčša optimálne riešenie. Ak semi-exaktná metóda nezíska optimálne riešenie, získané riešenie je veľmi dobré suboptimálne riešenie. Semi-exaktná metóda nevie zaručiť získanie optimálneho riešenia vo všetkých prípadoch, ale poskytuje dolnú hranicu riešenej úlohy a tým možnosť zníženia gapu. Pod gapom rozumiem rozdiel medzi hodnotou získaného suboptimálneho riešenia a dolnou hranicou riešenej úlohy. Podrobne som popísal princípy fungovania najpoužívanejších metód riešenia úloh navrhovania verejných obslužných systémov. Základnou metódou riešenia úloh celočíselného lineárneho programovania je metóda vetiev a hraníc, na ktorej je postavených mnoho algoritmov. Metódu vetiev a hraníc využíva exaktný algoritmus ZEBRA na riešenie úlohy p-mediánu založený na princípe reformulácie pôvodnej úlohy p-mediánu na jej pokrývaciu úlohu. Na podobnom princípe je založený aj radiálny prístup s deliacimi bodmi, kde úloha p-mediánu je preformulovaná na pokrývaciu úlohu a riešená pomocou univerzálnych IP solverov. Špeciálne som sa venoval Erlenkotterovmu princípu k riešeniu kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy (UFLP). Erlenkotterov prístup k riešeniu UFLP je založený na poznatkoch z teórie duality. Využíva vzťah medzi primárnym a duálnym riešením, kde na základe získania dobrého prípustného duálneho riešenia pre špecifikovanú podúlohu sa snaží skonštruovať dobré primárne riešenie. Erlenkotter navrhol algoritmus, kde tento prístup použil pre spracovanie každého vrcholu stromu riešenia v metóde vetiev a hraníc. Dolnú hranicu vrcholu v metóde vetiev a hraníc získava riešením duálneho modelu kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy, ktorú sa snaží heuristickou metódou rýchlo odhadnúť. Horná hranica vrcholu ako aj najlepšie nájdené riešenie je získané konštrukciou primárneho riešenia v snahe dodržať komplementárne podmienky v čo najväčšej možnej miere, teda s čo najmenším rozdielom medzi hornou a dolnou hranicou. Hornú hranicu udáva hodnota účelovej funkcie primárneho riešenia. Ďalej som ukázal princípy algoritmu BBDual [33], ktorý vylepšil získanie dolnej hranice spomínaného Erlenkotterovho prístupu a aplikovateľnosť Erlenkoterovho prístupu na riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému s Lagrangeovou relaxáciou p-mediánovej podmienky. Lagrangeová relaxácia umožňuje transformáciu umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk na kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu. Erlenkotterov prístup s Lagrangeovou relaxáciou realizuje algoritmus pMBBDual. V závere som uviedol aj riešenie úlohy váženého p-mediánu Lagrangeovou heuristikou [39], ktorá je založená na metóde vetiev a hraníc a Lagrangeovej relaxácii priraďovacích podmienok.

3. CIELE A METODIKA PRÁCE

3.1 Ciele práce

Cieľom dizertačnej práce je výskum metód navrhovania verejných obslužných systémov s exaktným optimalizačným jadrom pri využití prostriedkov aplikovanej informatiky. Tento hlavný cieľ je možné rozdeliť na jednotlivé čiastkové ciele.

Prvým čiastkovým cieľom je vylepšiť riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému získané Erlenkotterovým prístupom s Lagrangeovou relaxáciou. Tento čiastkový cieľ v sebe zahŕňa:

- návrh heuristických metód, ktoré vylepšia riešenie získané iteratívnym prístupom,
- obmedzenie vetviaceho algoritmu v metóde vetiev a hraníc, ktoré vylepší riešenie získané iteratívnym prístupom,
- porovnanie a výber najvhodnejšieho variantu, ktorý vylepší riešenie získané iteratívnym prístupom.

Druhým čiastkovým cieľom je vylepšenie Erlenkotterovho prístupu pre riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému s Lagrangeovou relaxáciu v najvhodnejšom nastavení Lagrangeovho multiplikátora. Tento čiastkový cieľ zahŕňa:

- analýza nákladov distribučného systému a vypracovanie hrubého odhadu nákladov distribučného systému,
- návrh iteratívneho prístupu s odhadom Lagrangeovho multiplikátora,
- porovnanie iteratívnych prístupov založených na metóde bisekcie alebo hrubom odhade najvhodnejšieho nastavenia Lagrangeovho multiplikátora.

Tretím čiastkovým cieľom je zovšeobecnenie Erlenkotterovho prístupu pre riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému. Tento čiastkový cieľ pre návrh exaktného algoritmu zahŕňa nasledovné podciele:

- riešenie umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk priamo v metóde vetiev a hraníc s využitím teórie duality,
- rozpracovanie teórie duality pre získanie dobrej dolnej hranice umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk,

- výskum prínosu resp. dopadu rôznych modifikácii duálneho prístupu k získaniu dolnej hranice riešenia pre prípady, kedy model kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy rozšírime o obmedzenie počtu vybudovaných stredísk,
- výskum prínosu alebo dopadu rôzneho výberu kandidáta na vetvenie v metóde vetiev a hraníc,
- výskum prínosu resp. dopadu rôznych modifikácii duálneho prístupu k získaniu hornej hranice riešenia umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk.

3.2 Metodika práce

Metodika práce sleduje cieľ, ktorým je výskum metód s exaktným optimalizačným jadrom pri využití prostriedkov aplikovanej informatiky za účelom získania efektívneho softvérového nástroja na podporu rozhodovania o štruktúre verejného obslužného systému.

Matematický model návrhu verejného obslužného systému, ktorý minimalizuje disjutilitu priemerného zákazníka odpovedá umiestňovacej úlohe o váženom p-mediáne. Ide o úlohu 0-1 matematického programovania, ktorá patrí k NP-ťažkým úlohám, kde u všetkých doteraz známych exaktných algoritmov počet operácii resp. doba výpočtu rastie s veľkosťou riešenej úlohy rýchlejšie ako akákoľvek polynomiálna funkcia. Teda efektívnosť v prípade exaktnej metódy, resp. algoritmu, bude meraná dobou, za ktorú daný algoritmus nájde pre úlohu danej veľkosti optimálne riešenie.

V prípade aproximatívnej metódy, ktorá môže viesť k suboptimálnemu riešeniu, bude efektívnosť algoritmu pre daný rozmer úlohy meraná dvoma parametrami, jednak dobou potrebnou pre získanie výsledného riešenia a ďalej odchýlkou hodnoty výsledného riešenia od optimálneho riešenia (ak je známe) alebo od dolnej hranice optimálneho riešenia.

Skúmané metódy návrhu štruktúry verejného obslužného systému sú založené na princípe vetiev a hraníc. O algoritmoch založených na tomto princípe je známe, že ich účinnosť závisí na tom ako kvalitne pracujú na danom type úlohy procedúry vypočítavajúce horné a dolné hranice najlepšieho riešenia obsiahnutého v modelmi vymedzených podmnožinách riešení. Práve tu je kvalita určená dvoma parametrami a to dobou výpočtu a presnosťou získania hranice. Jednoduchou úvahou môžeme ukázať, že krajné prístupy k návrhom zmienených procedúr nevedú ku kvalitnej metóde návrhu verejného obslužného systému. Ak je určenie dolnej hranice navrhnutou procedúrou veľmi presné, je obvykle veľmi pomalé (jedná sa prevažne o heuristiku) a teda aj keď je v metóde vetiev a hraníc vďaka svojej presnosti realizovaná na menšom počte podmnožín riešení, trvá celkový výpočet veľmi dlho. Naopak, ak je procedúra rýchla je obvykle málo presná a je potom vykonaná na omnoho väčšom počte podmnožín množiny všetkých riešení a celkový výpočet trvá opäť veľmi dlho. Preto pri výskume metód riešenia vychádzam z hypotézy, že pre daný typ úlohy existuje nejaká špecifická „ zlatá stredná cesta“, kedy existujú procedúry, v ktorých vhodný kompromis rýchlosti a presnosti dosiahne to, že celková doba metódy vetiev a hraníc bude malá. Overenie tejto hypotézy v skúmanom prípade určuje i metodiku výskumu. Tá bude spočívať v hľadaní procedúr pre určovanie horných a dolných hraníc modelom definovaných podmnožín množiny prípustných riešení návrhu verejného obslužného systému s regulovanou presnosťou a dobou výpočtu a v štúdiu toho ako príslušný kompromis ovplyvní chod celej metódy. Funkčnosť a požadované vlastnosti navrhnutých metód overím experimentálne na dostatočne veľkej množine testovacích úloh zo slovenskej cestnej siete, prípadne z voľne dostupných zdrojov na internete.

4. VÝSLEDKY A ICH VYHODNOTENIE

4.1 Matematická formulácia umiestňovacej úlohy návrhu verejného obslužného systému

Na danom území je potrebné optimálne rozmiestniť strediská obsluhy pre obsluhu zákazníkov v uzloch j z množiny J, pričom tieto strediská obsluhy je možné umiestniť iba v miestach i z množiny I. Aj jedno stredisko umiestnené v ktoromkoľvek uzle z množiny I je schopné obslúžiť všetkých zákazníkov. Úloha spočíva v minimalizácii celkových nákladov, ktoré zahŕňajú fixné náklady f_i spojené s umiestnením strediska v mieste i a náklady c_{ij} na uspokojenie požiadaviek zákazníka j z miesta i. Podmienkou je, aby každý zákazník bol priradený niektorému z vybudovaných stredísk, z ktorého bude obslúžený. Počet vybudovaných stredísk je maximálne p.

Takto definovaná úloha je umiestňovacou úlohou s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk. V danej úlohe predstavuje *I* množinu kandidátov, kde je možné umiestniť stredisko a *J* množinu všetkých zákazníkov. Pracuje sa tu s dvomi druhmi rozhodnutí. Rozhodnutia o umiestnení resp. neumiestnení strediska v mieste *i* z množiny *I*, ktoré sú v modeli modelované sadou bivalentných premenných y_i, ktoré nadobúdajú hodnotu y_i rovnú jednej, ak umiestnim stredisko v mieste *i* z množiny *I*. Premenné y_i sú rovné nule, ak neumiestnim stredisko v mieste *i* z množiny *I*. Rozhodnutia o priradení resp. nepriradení zákazníkov *j* z množiny *J* k stredisku *i* z množiny *I* sú modelované sadou premenných z_{ij}, kde z_{ij} sú rovné jednej, ak priradím zákazníka *j* z množiny *J* k stredisku *i* z množiny *I*. Premenné z_{ij} sú rovné nule, ak nepriradím zákazníka *j* z množiny *J* k stredisku *i* z množiny *I*. Náklady spojené s uspokojením požiadavky zákazníka *j* z množiny *J* z miesta *i* z množiny *I* sú modelované konštantami c_{ij}. Konštanty f_i predstavujú fixné náklady na udržanie obslužného strediska v mieste *i* z množiny *I*. Konštanta *p* udáva horné ohraničenie počtu vybudovaných stredísk. Matematický model umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom umiestnených stredísk vyzerá potom nasledovne (1) – (6):

$$\textit{Minimalizujte} \qquad \sum_{i\in I} f_i\, y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\, z_{ij} \tag{1}$$

$$\textit{Za podmienok:} \qquad \sum_{i\in I} z_{ij} = 1 \qquad \textit{pre } j \in J \tag{2}$$

$$z_{ij} \le y_i \qquad \textit{pre } i \in I, \quad j \in J \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I} y_i \le p \tag{4}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \textit{pre } i \in I \tag{5}$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \textit{pre } i \in I, \quad j \in J \tag{6}$$

Účelová funkcia (1) predstavuje celkové náklady uspokojenia požiadaviek zákazníkov a vybudovania stredísk, ktoré minimalizujeme. Podmienky (2) zabezpečujú, aby každý zákazník *j* z množiny *J* bol priradený k práve jednému vybudovanému stredisku *i* z množiny *I*. Podmienky (3) zabezpečujú, aby nebolo možné priradiť zákazníka *j* z množiny *J* miestu (kandidátovi na umiestnenie strediska), kde stredisko nie je vybudované. Vybudovanie maximálne *p* stredísk zabezpečuje podmienka (4). Podmienky (5) a (6) určujú obor hodnôt rozhodovacích premenných.

4.2 Matematická formulácia relaxovanej úlohy návrhu verejného obslužného systému

Pri návrhu verejného obslužného systému sa stretávame s obmedzením nákladov na vybudovanie stredísk obsluhy. Ak sú známe náklady f_i na vybudovanie strediska v mieste *i* a celkové obmedzenie nákladov *N* na vybudovanie celého systému, potom podmienka obmedzenia nákladov na umiestnenie stredísk má tvar:

$$\sum_{i\in I} f_i y_i \le N \tag{7}$$

Túto podmienku (7) je možné zastúpiť podmienkou obmedzujúcou počty vybudovaných stredísk a tým úlohu návrhu verejného obslužného systému previesť na úlohu p-mediánu. Riešením úlohy p-mediánu s využitím teórie duality sa zaoberal Galvao v článku [23]. Dodanie podmienky, ktorá obmedzuje počet stredísk v úlohe návrhu verejného obslužného systému znamená formulovať umiestňovaciu úlohu s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk (1) – (6). Riešenie takejto úlohy je možné získať pomocou Lagrangeovej relaxácie [26]. Lagrangeovou relaxáciou je možné umiestňovaciu úlohu s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk previesť na kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu. Vychádzam z modelu umiestňovacej úlohy (1) – (6). Pomocou Lagrangeovej relaxácie zavedením Lagrangeovho multiplikátora *Lg* prevediem úlohu (1) – (6) na kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu. Stačí relaxovať podmienku (4) a účelovú funkciu (1) doplniť o relaxovanú podmienku (4). Model relaxovanej úlohy potom vyzerá nasledovne:

$$Minimalizujte \quad \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} + Lg(\sum_{i \in I} y_i - p) \tag{8}$$

$$Za\ podmienok: \quad \sum_{i \in I} z_{ij} = 1 \qquad pre\ j \in J \tag{9}$$

$$z_{ij} \le y_i \qquad pre\ i \in I, \quad j \in J \tag{10}$$

$$y_i \ge 0 \qquad pre\ i \in I \tag{11}$$

$$z_{ij} \ge 0 \qquad pre\ i \in I, \quad j \in J \tag{12}$$

Opakovaným riešením úlohy (8) – (12) s meniacou sa hodnotou Lagrangeovho multiplikátora *Lg* dokážeme získať riešenie pôvodnej nerelaxovanej úlohy (1) – (6), Pre optimálne riešenie relaxovanej úlohy (8) – (12) platí, že ak posledný člen výrazu v účelovej funkcii (8) je rovný nule, tzn. hodnota Lagrangeovho multiplikátora *Lg* je rovná nule, alebo podmienka (4) je splnená na rovnosť, potom je toto riešenie aj optimálnym riešením úlohy (1) – (6). Hodnota *Lg*, s ktorou bolo toto riešenie získané má význam veľkosti úbytku účelovej funkcie (1) optimálneho riešenia pôvodnej úlohy (1) – (6) pri zvýšení *p* na pravej strane podmienky (4) o jednotku. Zoberme do úvahy, že fixné náklady na vybudovanie strediska sú nulové, tzn. prvý člen účelovej funkcie je nulový. Potom získaná hodnota *Lg* udáva, o koľko sa hodnota optimálneho riešenia zníži, ak sa pridá jedno obslúžené stredisko. S určitou toleranciou tak hodnota *Lg* udáva hodnotu jedného strediska v jednotkách účelovej funkcie. Ak podmienka (4) je pre optimálne riešenie ***z, y*** úlohy (8) – (12) splnená ako ostrá nerovnosť, nemôžem tvrdiť, že som našiel optimálne riešenie pôvodnej nerelaxovanej úlohy, ale hodnota (8) udáva dolnú hranicu optimálneho riešenia pôvodnej úlohy (1) – (6). Tretí člen účelovej funkcie (8) udáva maximálny rozdiel medzi hodnotou účelovej funkcie (8) pre získané riešenie ***z***, ***y*** a pre neznáme optimálne riešenie nerelaxovanej úlohy (1) – (6).

4.3 Semi-exaktný iteratívny prístup s vylepšovacou heuristikou

Semi-exaktný iteratívny prístup predstavuje riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému pomocou Erlenkotterovho prístupu a Lagrangeovej relaxácie p-mediánovej podmienky. Tento iteratívny prístup realizuje algoritmus pMBBDual. V algoritme pMBBDual [7], ktorý je rozšírením algoritmu BBDual na riešenie umiestňovacej úlohy s obmedzením počtom stredísk, je realizované iteratívne vyhľadávanie Lagrangeovho multiplikátora *Lg* pomocou metódy bisekcie. Bisekciou sa pokúšam nájsť najlepšie nastavenie Lagrangeovho multiplikátora, ktorého hodnota odpovedá navýšeniu fixných nákladov všetkých kandidátov na stredisko. Takýmto prístupom môžem dospieť k získaniu riešenia umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk (1) - (6). Získanie riešenia úlohy návrhu verejného obslužného systému iteratívnym prístupom môže byť časovo náročné. Semi-exaktný iteratívny algoritmu nevie vždy zaručiť optimálne riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému. Lagrangeovou relaxáciou síce získam vo väčšine prípadov optimálne riešenie, avšak ojedinele sú prípady, kedy optimálne riešenie nezískam [27]. Výhodou je však získanie dolnej hranice riešenia, ktorú nám určuje hodnota účelovej funkcie optimálneho riešenia relaxovanej úlohy (8). Platí však, že hodnota účelovej funkcie neznámeho optimálneho riešenia sa nachádza niekde medzi hodnotou účelovej funkcie optimálneho riešenia relaxovanej úlohy (8) a hodnotou optimálneho riešenia nerelaxovanej úlohy (1). Ak posledný člen na pravej strane vzťahu (8) je nulový, potom som získal optimálne riešenie pôvodnej úlohy, inak nemôžem tvrdiť, že som našiel optimálne riešenie pôvodnej nerelaxovanej úlohy, ale hodnota (8) udáva dolnú hranicu optimálneho riešenia pôvodnej úlohy. Čo nás viedlo k výskumnej otázke, ako je možné zlepšiť suboptimálne riešenie získané algoritmom pMBBDual.

Zlepšenie získaného suboptimálneho riešenia algoritmom pMBBDual realizujem pomocou návrhu vhodnej heuristickej metódy alebo formou obmedzenia vetvenia v metóde vetiev a hraníc. Navrhol som tri vylepšovacie heuristiky s rôznymi stratégiami výberu stredísk obsluhy [10], ktoré zlepšia suboptimálne riešenie získané algoritmom pMBBDual. Otestoval som ich na slovenskej cestnej sieti s ohľadom na kvalitu vylepšeného riešenia a výpočtový čas. Na základe vykonaných experimentov som ako najvýhodnejšiu vyhodnotil vkladaciu heuristiku so stratégiou najlepší vhodný. Ako alternatívu k vylepšovacím heuristikám som navrhol zlepšiť získané riešenie obmedzením vetvenia v metóde vetiev a hraníc, ktoré sa však neosvedčilo ako vhodný variant zlepšenia suboptimálneho riešenia, nakoľko výpočtový čas mal tendenciu exponenciálne rásť, čo bolo spôsobené skoro úplnou enumeráciou vetviaceho algoritmu v metóde vetiev a hraníc. Obmedzenie vetvenia spočívalo vo fixácii najviac *p* stredísk na hodnotu jedna. Po fixácii *p* stredísk na hodnotu jedna, je vetvenie na hodnotu jedna v danej vetve metódy vetiev a hraníc ukončené, nakoľko už žiadne prípustné riešenie ďalej nezískam. Ako najvhodnejší spôsob zlepšenia som vyhodnotil vkladaciu heuristiku so stratégiou najlepší vhodný.

Princíp vkladacej heuristiky so stratégiou najlepší vhodný je založený na predpoklade, že je k dispozícii najlepšie získané prípustné riešenie, ktoré pozostáva z menšieho počtu umiestnených stredísk ako *p*. Nech počet stredísk najlepšieho získaného prípustného riešenia algoritmom pMBBDual je *r* a *p* udáva maximálny počet možných umiestnení stredísk. Hľadám stredisko zo všetkých nezaradených stredísk s najväčším zlepšením hodnoty účelovej funkcie doterajšieho riešenia k novému riešeniu s *r*+1 počtom stredísk. Nájdené stredisko, ktoré najviac zlepší hodnotu riešenia, nazývané najlepším vhodným, zaradím do riešenia. Proces hľadania a vkladania stredísk opakujem, pokiaľ počet umiestnených stredísk nie je rovný počtu *p*, kedy vkladacia heuristika skončí. Počet pridaných stredísk je teda rovný rozdielu (*p*-*r*).

Okrem zlepšenia riešenia iteratívneho prístupu je výskumnou otázkou vhodnosť použitia bisekčného algoritmu pre získanie najlepšieho nastavenia Lagrangeovho multiplikátora.

4.4 Iteratívny prístup s odhadom Lagrangeovho multiplikátora

Získanie najlepšieho nastavenia Lagrangeovho multiplikátora pomocou algoritmu bisekcie môže viesť k vykonaniu veľkého počtu iterácii, čo môže negatívne vplývať na výpočtový čas. Získanie najlepšieho nastavenia Lagrangeovho multiplikátora je možné získať aj odhadom nákladov distribučného systému. Pri zadaných nulových fixných nákladoch je hodnota odhadu požadovaných nákladov pre získanie najlepšieho prípustného riešenia rovná hodnote Lagrangeovho multiplikátora, ktorý určuje navýšenie pôvodne nulových fixných nákladov.

Na základe analýzy závislosti medzi počtom vybudovaných stredísk a požadovanom nastavení fixných nákladov som sa pokúsil odhadnúť náklady distribučného systému *f* pre získanie požadovaného počtu umiestnených stredísk *p*. Návrhom iteratívneho prístupu s odhadom nákladov na získanie požadovaného počtu umiestnených stredísk *p* sa snažím dosiahnuť najlepšie nastavenie Lagrangeovho multiplikátora s menším počtom iterácii algoritmu pMBBDual ako som získal pôvodne bisekčným algoritmom. Nech *m* udáva mohutnosť množiny *I* možných umiestnení stredísk, p_F udáva počet umiestnených stredísk pri fixných nákladoch *F*, potom hrubý odhad Lagrangeovho multiplikátora zapíšem nasledovne:

$$f = \left(\frac{m-p}{m-p_F}\,\frac{p_F}{p}\right)^{\alpha} F \tag{13}$$

Experimentálne som sa pokúsil získať hodnotu exponenta *α*, ktorý by zabezpečil najvhodnejší odhad hodnoty nákladov *f*. Pre získanie odhadu *f* je potrebné okrem hodnoty exponenta vedieť resp. spočítať pre nejaké zvolené počiatočné náklady *F* počet stredísk p_F. Získaný hrubý odhad predstavuje nastavenie Lagrangeovho multiplikátora v jednotlivých iteráciách algoritmu pMBBDual, za podmienky nulových počiatočných fixných nákladov F_0. Skonštruoval som algoritmus získania najlepšieho nastavenia Lagrangeovho multiplikátora pomocou odhadu (13) zapísaný nasledovne:

0. Zvoľte „ad hoc“ nejaké fixné náklady F, ktorých hodnota bude dostatočne veľká alebo rovná hornému odhadu F, pre ktoré je hodnota p_F rovná jednej, hodnotu exponenta α a r predstavujúce koeficient delenia pre intervalové vyhľadávanie.
1. Nastavte náklady $fmn = 0$ a vypočítajte počet stredísk pmn pomocou algoritmu BBDual. Nastavte $fmx = F$, $pmx = p_F$
2. Pre požadované p vypočítajte f podľa vzťahu (13).
3. Ak platí, že $fmn \leq f \leq fmx$ nastavte hodnotu nového $F = f$, inak nastavte hodnotu F podľa vzťahu:

$$F = \max\{1, (fmx - fmn)/r\} \tag{14}$$

4. Pre F spočítajte algoritmom BBDual novú hodnotu p_F.
5. Ak $p_F > p$, položte $fmn = F$, $pmn = p_F$.
6. Ak $p_F < p$, položte $fmx = F$, $pmx=p_F$.
7. Ak $p_F = p$ alebo platí, že $fmx - fmn = 1$ skončte, inak späť na krok 2.

Pre navrhnutý algoritmus bolo potrebné vhodné nastavenia parametrov α, F a koeficientu delenia r v intervalovom vyhľadávaní (14), ktoré slúži na korekciu nastavenia Lagrangeovho multiplikátora v prípade nevhodného odhadu. Ak by bol koeficient r nastavený na hodnotu dva, jednalo by sa o bisekciu. Vhodnosť zvolených nastavení parametrov α a r ako aj hypotézu o aktualizácii parametra α počas výpočtu som sa snažil experimentálne potvrdiť alebo vyvrátiť na benchmarkoch zo slovenskej cestnej siete a nájsť ich najlepšie nastavenie (exponent α =1,1 s nemeniacou sa hodnotou, koeficient delenia r = 8). Počiatočné fixné náklady F som nastavil na rovnakú hodnotu ako bola nastavená v bisekčnom algoritme pMBBDual (F = *2048*).

4.5 Porovnanie iteratívnych algoritmov

Navrhnuté iteratívne algoritmy s vylepšovacou heuristikou som porovnal na benchmarkoch zo slovenských krajov a na celej cestnej sieti Slovenska pre úlohu p-mediánu a váženého p-mediánu s vybranými hodnotami maximálneho počtu umiestnených stredísk p. Algoritmy som vyhodnotil na základe *PoR* počtu získaných optimálnych riešení k celkovému počtu vykonaných experimentov pre testovaný benchmark v percentách, percentuálnom vyjadrení relatívnej odchýlky *Gap* medzi získanou hodnotou riešenia a hodnotou optimálneho riešenia v priemere, priemerného výpočtového času *pt* z časov jednotlivých experimentov, priemerný počet vykonaných iterácií *ppI* a počtu predčasných ukončení algoritmu *ppU* po uplynutí jednej hodiny výpočtového času.

	pMBBDual +V1			*Základný*			*Vylepšený*		
úloha	*Testovaný kraj*	*PoR [%]*	*Gap [%]*	*pt[s]*	*ppI*	*ppU*	*pt[s]*	*ppI*	*ppU*
p-medián	Bratislavský	93	0,03	0,07	13,1	0	0,05	7,4	0
	Banskobystrický	72	0,04	38,99	13,7	0	11,49	5,9	0
	Košický	78	0,09	188,63	13,6	0	42,97	7,5	0
	Prešovský	76	0,07	696,23	13,6	1	383,15	7,5	0
	Nitriansky	83	0,04	42,12	13,5	0	6,60	7,4	0
	Trenčiansky	83	0,04	0,58	13,6	0	0,22	7,2	0
	Trnavský	81	0,07	5,63	13,6	0	2,03	7,4	0
	Žilinský	75	0,10	1,83	13,7	0	0,49	6,2	0
	Slovensko	-	-	3600,00	2,0	58	3600,00	2,0	58
vážený p-medián	Bratislavský	100	0,00	0,02	10,0	0	0,02	8,3	0
	Banskobystrický	100	0,00	0,96	12,6	0	0,23	6,0	0
	Košický	100	0,00	0,48	12,2	0	0,21	8,1	0
	Prešovský	97	0,00	4,43	13,4	0	1,17	7,8	0
	Nitriansky	100	0,00	0,31	12,8	0	0,16	8,4	0
	Trenčiansky	100	0,00	0,13	12,6	0	0,08	7,8	0
	Trnavský	100	0,00	0,11	12,3	0	0,09	8,9	0
	Žilinský	95	0,00	0,13	12,1	0	0,07	6,8	0
	Slovensko	93	0,00	635,47	13,5	0	189,98	6,3	0

Tabuľka 1 Porovnanie iteratívnych algoritmov na slovenskej cestnej sieti

Základný algoritmus pMBBDual s vylepšovacou heuristikou V1 je reprezentovaný algoritmom, kde najlepšie nastavenia Lagrangeovho multiplikátora je získané bisekčným algoritmom. Vylepšenie získaného riešenia bolo dosiahnuté vkladacou heuristikou so stratégiou najlepší vhodný.

Vylepšený algoritmus pMBBDual s vylepšovacou heuristikou V1 je reprezentovaný algoritmom, kde metódou hrubého odhadu Lagrangeovho multiplikátora s fixnou hodnotou exponenta $\alpha = 1{,}1$ a parametrom delenia $r = 8$ hľadám najlepšie nastavenie Lagrangeovho multiplikátora. Vylepšenie získaného riešenia bolo dosiahnuté vkladacou heuristikou so stratégiou najlepší vhodný.

Vyhodnotenie experimentov (viď Tabuľka 1) na základe definovaných štatistík ukázalo, že získanie Lagrangeovho multiplikátora algoritmom s hrubým odhadom umožňuje dosiahnuť rovnaké riešenie v priemere za menší výpočtový čas a menší počet vykonaných iterácií v porovnaní s bisekčným algoritmom. Veľký počet iterácií ovplyvňuje dĺžku výpočtového času, čo pri časovom obmedzení algoritmu môže spôsobiť jeho predčasné ukončenie. Preto získavanie Lagrangeovho multiplikátora hrubým odhadom je vhodnejšie ako získavanie Lagrangeovho multiplikátora bisekčným algoritmom. Ani jeden algoritmus neposkytol riešenie úlohy p-mediánu na celom Slovensku (2916x2919), ale pri úlohe váženého p-mediánu pre celé Slovensko sme získali 93% optimálnych riešení.

4.6 Zovšeobecnený Erlenkotterov prístup

Zovšeobecnenie Erlenkotterovho prístupu predstavuje riešiť úlohu návrhu verejného obslužného systému ako umiestňovaciu úlohu s obmedzeným počtom vybudovaných obslužných stredísk (1) – (6) a získať tak exaktný algoritmus na riešenie tejto úlohy. Návrh exaktného algoritmu pMedBBDual založeného na metóde vetiev a hraníc vyžaduje definovať primárny matematický model a k nemu prislúchajúci duálny model spolu s podmienkami komplementárnosti na výpočet dolnej a hornej hranice riešenia, určiť spôsob vetvenia a schému prehľadania stromu riešení v metóde vetiev a hraníc.

Na základe teórie duality [31] som skonštruoval k modelu neceločíselného lineárneho programovania úlohy návrhu verejného obslužného systému aj príslušný duálny model, ktorý po zjednodušení vyzerá nasledovne:

$$Maximalizujte \quad \sum_{j \in J} v_j + p\,x \tag{15}$$

$$Za\ podmienok: \quad \sum_{j \in J} max\{0, v_j - c_{ij}\} + x + u_i = f_i \qquad pre\ i \in I \tag{16}$$

$$v_j \geq 0 \qquad pre\ j \in J \tag{17}$$

$$x \leq 0 \tag{18}$$

$$u_i \geq 0 \qquad pre\ i \in I \tag{19}$$

V redukovanom duálnom modeli premenné v_j korešpondujú s podmienkami (2) z primárneho modelu, ktoré zabezpečujú, aby zákazníkovi j z množiny J bolo priradené práve jedno stredisko i z množiny I. Premenná x odpovedá štrukturálnej podmienke (4) a nadobúda nekladnú hodnotu. Doplnkové premenné u_i umožňujú, aby som mal podmienky (16) v tvare rovnosti. Podmienky (17) – (19) sú obligatórne, teda zabezpečujú obor hodnôt rozhodovacích duálnych premenných v_j, x a doplnkových premenných u_i.

Získané poznatky z Erlenkotterovho princípu a teórie duality som aplikoval na získanie dolnej hranice, hornej hranice, kandidáta na vetvenie pre úlohu návrhu verejného obslužného systému (1) – (6). Získanie dolnej hranice predstavuje riešenie redukovaného duálneho modelu vychádzajúce z počiatočného riešenia (20) - (22), ktoré je vylepšované korekčným vzostupným duálnym algoritmom (CDA), ktorý som navrhol.

$$v_j = min\{c_{ij} : i \in I\} \qquad pre\ j \in J \tag{20}$$

$$u_i = f_i \qquad pre\ i \in I \tag{21}$$

$$x = 0 \tag{22}$$

Algoritmus CDA vychádza zo vzostupného duálneho algoritmu (DA), ktorý navrhol Erlenkotter [22] a vylepšili Janáček a Buzna [33]. V dizertačnej práci som uviedol okrem navrhnutého CDA algoritmu aj vylepšenie dolnej hranice riešenia algoritmom duálnych úprav (DAD). Algoritmus duálnych úprav je založený na zmenšení jednej hodnoty duálnej premennej v_j, ktoré vytvorí voľnú „kapacitu" aspoň u dvoch umiestnení i_1, i_2 a následné zvýšenie aspoň dvoch hodnôt iných dvoch duálnych premenných.

Na výpočet hornej hranice a primárneho riešenia využívam duálne riešenie získané pri výpočte dolnej hranice daného vrcholu. Primárne riešenie konštruujem tak, aby podmienky pre primárnu a duálnu úlohu boli splnené čo najtesnejšie. Pre všetky dvojice prípustných riešení oboch sústav platia nasledujúce podmienky (23) – (26):

$$(y_i - z_{ij})\, max\{0, v_j - c_{ij}\} \geq 0 \qquad pre\ i \in I, \quad j \in J \tag{23}$$

$$\left(\sum_{i\in I} y_i - p\right)x \geq 0 \tag{24}$$

$$u_i y_i \geq 0 \qquad pre\ i \in I \tag{25}$$

$$max\{0, c_{ij} - v_j\}\, z_{ij} \geq 0 \qquad pre\ i \in I, \quad j \in J \tag{26}$$

Ak sú podmienky (23) – (26) splnené na rovnosť, tak dané riešenia sú optimálne pre obe úlohy a hovoríme o tzv. komplementárnych podmienkach. Zovšeobecnením Erlenkotterovho prístupu som získal novú podmienku (24). V prípade, že niektoré podmienky nie sú splnené na rovnosť, bude hodnota účelovej funkcie primárneho riešenia $F_P(y,z)$ vyššia ako hodnota duálneho riešenia $F_D(u,v)$, a to práve o súčet ľavých strán podmienok (23) – (26):

$$gap = F_p(y,z) - F_D(u,v,x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(y_i - z_{ij})max\{0, v_j - c_{ij}\} + \sum_{i\in I} u_i\, y_i + $$

$$+\left(\sum_{i\in I} y_i - p\right)x + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} max\{0, c_{ij} - v_j\}\, z_{ij} \tag{27}$$

Pri konštrukcii prípustného primárneho riešenia sa snažím získať čo najmenší *gap* medzi hornou a dolnou hranicou vrcholu a to držaním podmienok (26) v tvare rovnosti priradením zákazníka j len k tým umiestneniam i, o ktoré sa zákazník opiera ($v_j \geq c_{ij}$), držaním podmienok (25) v tvare rovnosti umiestnením stredísk obsluhy z množiny možných umiestnení I, o ktoré sa opiera aspoň jeden zákazník ($u_i=0$) a držaním podmienky (24) v tvare rovnosti umiestnením presne p stredísk resp. udržiavaním nulovej hodnoty premennej x a potom môžem umiestniť nanajvýš p stredísk. Následne mi postačuje minimalizovať podmienky (23). Pomocou heuristického postupu s Erlenkotterovým usporiadaným zákazníkov sa snažím nájsť najmenšiu množinu umiestnení, o ktorú sa opierajú zákazníci tak, aby sa každý opieral aspoň o jedno umiestnenie z hľadanej podmnožiny. Dodržanie podmienky (24) v tvare rovnosti považujem za prvoradé oproti rovnostiam ostatných podmienok pri konštrukcii minimálnej množiny umiestnení s Erlenkotterovým usporiadaním zákazníkov, ktorá reprezentuje primárne riešenie.

Ak som pri konštrukcii minimálnej množiny umiestnení v snahe dodržať podmienky čo najtesnejšie dospel aj tak ku kladnej hodnote *gap*, snažím sa ju znížiť vhodným výberom kandidáta na vetvenie, ktorý určuje spôsob vetvenia algoritmu. Spôsob vetvenia predstavuje vytváranie stromu prehľadania v algoritme pMedBBDual fixovaním jednotlivých premenných y_i, ktoré rozhodujú o umiestnení strediska. Fixáciou sa zredukuje množina riešení vypustením jednoznačne určených premenných y_i, ktoré vhodným použitím prohibitívnej konštanty v účelovej funkcii vynútia minimalizáciu. Poradie fixácii jednotlivých premenných y_i závisí od vyhodnotenia narušenia rovnosti podmienok (23), (25) – (26) pre jednotlivé strediská i. Hľadanie najväčšieho porušenia podmienok je časovo náročné, preto som sa zameral na nájdenie prvého porušenia komplementárnych podmienok v poradí (23)->(25)->(26). Treba si však uvedomiť, že výber kandidáta na vetvenie pre zníženie hodnoty *gap* nie je vždy vhodný v rámci získania požadovaného riešenia, čo som vyriešil úplnou fixáciou.

Úplná fixácia v metóde vetiev a hraníc predstavuje zafixovanie všetkých doposiaľ nefixovaných stredísk na hodnotu nula alebo jedna. Pri postupnej fixácii kandidátov získaných na vetvenie pomocou navrhnutého algoritmu musím rozlíšiť prípady, kedy sa nepodarilo vylúčiť vrchol z prehľadávania a súčasne nie je vhodné ďalej vetviť v metóde vetiev a hraníc. Využitím úplnej fixácie sa snažím obmedziť ďalšiemu zbytočnému vetveniu v algoritme. Ďalšie vetvenie v algoritme by viedlo k získaniu neprípustného riešenia, nenájdeniu kandidáta na vetvenie alebo porušeniu rovnosti podmienky (24).

Pre realizáciu algoritmu pMedBBDual je dôležitá v neposlednom rade aj schéma prehľadania v metóde vetiev a hraníc. Schéma prehľadania je určená elementárnym pravidlom, ktoré hovorí o tom, ktorý z dvoch novovytvorených vrcholov so spoločným predchodcom bude vybraný a spracovaný ako prvý. Dvoma novovytvorenými vrcholmi chápem vrchol získaný príkazom (posledná fixácia na 1) a vrchol získaný zákazom (posledná fixácia na 0). V algoritme pMedBBDual, ktorý realizuje zovšeobecnený prístup, sa strom riešení prehľadáva do hĺbky s výberom vrcholu s menšou hodnotou dolnej hranice, pričom výnimkou je prednosť v spracovaní vrcholu, ktorý bude vylúčený. Vybraním spracovávaného vrcholu je druhý vrchol odložený do zásobníka nespracovaných vrcholov spolu s hodnotami duálnych premenných pre neskoršie spracovanie pri návrate (backtracking).

Algoritmus pMedBBDual som otestoval na slovenskej cestnej sieti s ohľadom na výpočtový čas, kde sa ukázalo, že získanie optimálneho riešenia už pri rozsahovo malých úlohách je veľmi časovo náročné.

4.7 Vylepšenie exaktného optimalizačného jadra

Vylepšenie exaktného optimalizačného jadra predstavovalo výskum prínosu navrhnutých metód algoritmu pMedBBDual pre získanie dolnej hranice, hornej hranice ako aj kandidáta na vetvenie v metóde vetiev a hraníc a ich možnosť vylepšenia. Na základe experimentov som sa snažil analyzovať, čo spôsobuje časovú náročnosť algoritmu pMedBBDual, ktorý realizuje zovšeobecnený prístup, v snahe vylepšiť navrhnutý algoritmus.

Na testovanie kvality dolnej hranice, ktorá je získaná metódou CDA, som použil hodnotu optimálneho riešenia úlohy získaného univerzálnym IP solverom ako hornú hranicu riešenia. Nastavená horná hranica riešenia umožňuje otestovať efektívnosť vetviaceho algoritmu pri znižovaní rozdielu medzi hornou hranicou riešenia a dolnými hranicami spracovaných vrcholov v metóde vetiev a hraníc. Ukázalo sa, že navrhnutá metóda CDA poskytla nepostačujúcu dolnú hranicu pre exaktný algoritmus, preto som navrhol novú procedúru založenú na inkrementačnom princípe. Tento inkrementačný korekčný duálny algoritmus ICDA [12] poskytol kvalitnejšiu dolnú hranicu, ktorá sa odzrkadlila menším počtom spracovaných vrcholov vo vetviacom algoritme, kratším výpočtovým časom ako aj hodnotou dolnej hranice koreňa bližšie k hodnote hornej hranice riešenia. Rozdiel medzi navrhnutými metódami pre získanie dolnej hranice bol v nastavovaní duálnej premennej x. Kým v CDA metóde bola zmena Δx viazaná na spracovávaného zákazníka, v ICDA metóde som nastavenie premennej x realizoval postupne vždy o hodnotu jedna.

V dizertačnej práci som skúmal do akej miery je potrebné ukladať hodnoty duálnych premenných do zásobníka nespracovaných vrcholov, z ktorých neskôr vychádzam keď vrchol spracovávam. Experimenty ukázali, že ukladanie duálnych premenných nie je potrebné, nakoľko je výhodnejšie vychádzať z počiatočného nastavenia duálnych premenných (20) – (22) pri konštrukcii duálneho riešenia, čo je demonštrované menším počtom spracovaných vrcholov a kratším výpočtovým časom.

V ďalšej časti práce som sa zaoberal výskumom prínosu resp. dopadu rôzneho výberu kandidáta na vetvenie v metóde vetiev a hraníc. Modifikoval som výber kandidáta na vetvenie v metóde vetiev a hraníc , ktoré algoritmus pMedBBDual realizoval. Navrhol som viaceré metódy založené na rôznom poradí vyhodnotenia komplementárnych podmienok. Navrhnuté metódy som porovnal na slovenskej cestnej sieti v priemernom a relatívnom výpočtovom čase, priemernom a relatívnom počte získaných kandidátov na vetvenie. Ukázalo sa, že to nepostačovalo na výber najvhodnejšej metódy. Preto som využil štatistický test, konkrétne dvojvýberový t-test s nerovnosťou rozptylov [40]. Na základe vykonaného testu som vybral ako najvhodnejšiu metódu, metódu s nasledovným poradím vyhodnotenia podmienok (25)->(23)->(26).

V rámci výskum prínosu resp. dopadu rôznych modifikácii duálneho prístupu k získaniu hornej hranice riešenia umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk som navrhol viaceré metódy pre získanie hornej hranice spracovaného vrcholu v metóde vetiev a hraníc založené na dodržiavaní komplementárnych podmienok pri konštrukcii primárneho riešenia s rôznym poradím spracovania zákazníkov. Navrhnuté metódy som porovnal na slovenskej cestnej sieti v priemernom a relatívnom výpočtovom čase, priemernom a relatívnom počte spracovaných vrcholov. Ukázalo sa, že pôvodné Erlenkotterovo usporiadanie zákazníkov pri získaní minimálnej množiny umiestnení je najvhodnejšie. Vhodnosť pôvodnej metódy bola potvrdená štatistickým testom, konkrétne dvojvýberovým t-testom s nerovnosťou rozptylov [40].

Vylepšenie exaktného optimalizačného jadra algoritmu pMedBBDual som dokazoval porovnaním s pôvodnou (základnou) verziou algoritmu.

4.8 Porovnanie algoritmov založených na zovšeobecnenom Erlenkotterovom prístupe

Navrhnuté zovšeobecnené algoritmy som porovnal pre úlohu p-mediánu a váženého p-mediánu na slovenských krajoch a na celej cestnej sieti Slovenska s vybranými hodnotami maximálneho počtu umiestnených stredísk *p* pri obmedzení behu algoritmu stanoveného na jednu hodinu výpočtového času, keďže sa ukázalo, že algoritmy sú v niektorých prípadoch časovo náročné. Zovšeobecnené algoritmy sú exaktné, z čoho vyplýva, že poskytujú optimálne riešenie danej úlohy. Avšak časové obmedzenie doby výpočtu môže viesť k zníženiu kvality riešenia. Navrhnuté algoritmy som vyhodnotil na základe *PoR* počtu získaných optimálnych riešení k celkovému počtu vykonaných experimentov pre testovaný benchmark v percentách, *Gap* percentuálnom vyjadrení relatívnej odchýlky medzi získanou hodnotou riešenia a hodnotou optimálneho riešenia v priemere, priemerného výpočtového času *pt* z časov jednotlivých experimentov a počtu predčasných ukončení algoritmu po uplynutí jednej hodiny výpočtového času *ppU*.

pMedBBDual		*ZÁKLADNÝ*				*VYLEPŠENÝ*			
úloha	*Testovaný kraj*	*PoR [%]*	*Gap [%]*	*pt[s]*	*ppU*	*PoR [%]*	*Gap [%]*	*pt[s]*	*ppU*
p-medián	Bratislavský	80	0,69	1153,33	5	100	0,00	0,15	0
	Banskobystrický	80	0,34	2097,54	6	84	0,01	898,30	5
	Košický	87	0,06	1565,26	5	87	0,05	1804,65	11
	Prešovský	73	2,64	3301,86	28	85	0,03	1241,65	10
	Nitriansky	74	1,15	1270,80	6	96	0,00	577,17	3
	Trenčiansky	78	0,51	1040,56	5	100	0,00	4,84	0
	Trnavský	94	0,45	597,15	2	100	0,00	361,59	1
	Žilinský	50	4,68	2083,02	11	100	0,00	125,43	0
	Slovensko	-	-	3600,00	58	-	-	3487,59	56
vážený p-medián	Bratislavský	94	0,49	868,05	4	100	0,00	0,39	0
	Banskobystrický	60	3,90	2505,25	12	100	0,00	207,92	0
	Košický	39	7,48	2989,27	17	100	0,00	147,70	0
	Prešovský	27	6,14	3380,25	29	97	0,00	762,86	3
	Nitriansky	43	8,83	2279,40	14	100	0,00	134,37	0
	Trenčiansky	56	4,87	2226,30	11	100	0,00	9,15	0
	Trnavský	75	0,83	939,89	4	100	0,00	6,98	0
	Žilinský	50	9,14	2221,46	12	100	0,00	13,43	0
	Slovensko	2	20,23	3600,00	58	0	17,90	3600,00	58

Tabuľka 2 Porovnanie algoritmov založených na zovšeobecnenom Erlenkotterovom prístupe

Základný algoritmus pMedBBDual je reprezentovaný algoritmom, pozostávajúci hlavne z metódy CDA na získanie dolnej hranice, spôsobom spracovania vrcholu z uložených hodnôt duálnych premenných v zásobníku, získania minimálnej množiny umiestnených stredísk s Erlenkotterovým usporiadaním zákazníkov a získania kandidáta na vetvenie vyhodnotením podmienok v poradí (23)->(25)->(26).

Vylepšený algoritmus pMedBBDual je reprezentovaný algoritmom pozostávajúci hlavne z metódy ICDA na získanie dolnej hranice, spôsobu spracovania vrcholu stromu vetvenia s počiatočným nastavením duálnych premenných (20)-(22), získania minimálnej množiny umiestnených stredísk s Erlenkotterovým usporiadaním zákazníkov a získania kandidáta na vetvenie vyhodnotením podmienok v poradí (25)->(23)->(26).

Vyhodnotenie experimentov na základe definovaných štatistík (viď Tabuľka 2) ukázalo, že vylepšený algoritmus je v porovnaní so základným algoritmom lepší a to vo všetkých meraných štatistikách. Výnimkou bol jeden testovaný kraj, kde pri úlohe p-mediánu bol pôvodný algoritmus v priemernom čase lepší, čo sa odzrkadlilo menším počtom predčasných zastavení algoritmu, avšak v získaní optimálnych riešení *PoR* sa to neprejavilo, dokonca vylepšený algoritmus získal kvalitnejšie riešenia *Gap*. V ostatných prípadoch pri úlohe p-mediánu vylepšený algoritmus je lepší vo všetkých meraných štatistikách, aj keď sa stalo, že algoritmus musel byť predčasne ukončený. Pri úlohe váženého p-mediánu je vylepšený algoritmus jednoznačne lepší, či už z časového hľadiska alebo kvality získaného riešenia.

4.9 Porovnanie semi-exaktného iteratívneho a zovšeobecného exaktného algoritmu

Navrhnutý vylepšený semi-exaktný algoritmus som porovnal s vylepšeným zovšeobecneným exaktným algoritmom na slovenských krajoch a na celej cestnej sieti Slovenska pre úlohu p-mediánu, váženého p-mediánu a kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu s vybranými hodnotami maximálneho počtu umiestnených stredísk *p* pri obmedzení behu algoritmu stanoveného na jednu hodinu výpočtového času, ktorý som považoval za adekvátny k získaniu požadovaného riešenia. Navrhnuté algoritmy som vyhodnotil na základe *PoR* počtu získaných optimálnych riešení k celkovému počtu vykonaných experimentov pre testovaný benchmark v percentách , percentuálnom vyjadrení relatívnej odchýlky *Gap* medzi získanou hodnotou riešenia a hodnotou optimálneho riešenia v priemere, priemerného výpočtového času *pt* z časov jednotlivých experimentov a počtu predčasných ukončení algoritmu po uplynutí jednej hodiny výpočtového času *ppU*.

		Vylepšený pMBBDual+V1				*Vylepšený pMedBBDual*			
úloha	*Testovaný kraj*	*PoR [%]*	*Gap[%]*	*pt[s]*	*ppU*	*PoR [%]*	*Gap [%]*	*pt[s]*	*ppU*
p-medián	Bratislavský	93	0,03	0,05	0	100	0,00	0,15	0
	Banskobystrický	72	0,04	11,49	0	84	0,01	898,30	5
	Košický	78	0,09	42,97	0	87	0,05	1804,65	11
	Prešovský	76	0,07	383,15	0	85	0,03	1241,65	10
	Nitriansky	83	0,04	6,60	0	96	0,00	577,17	3
	Trenčiansky	83	0,04	0,22	0	100	0,00	4,84	0
	Trnavský	81	0,07	2,03	0	100	0,00	361,59	1
	Žilinský	75	0,10	0,49	0	100	0,00	125,43	0
	Slovensko	-	-	3600,00	58	-	-	3487,59	56
vážený p-medián	Bratislavský	100	0,00	0,02	0	100	0,00	0,39	0
	Banskobystrický	100	0,00	0,23	0	100	0,00	207,92	0
	Košický	100	0,00	0,21	0	100	0,00	147,70	0
	Prešovský	97	0,00	1,17	0	97	0,00	762,86	3
	Nitriansky	100	0,00	0,16	0	100	0,00	134,37	0
	Trenčiansky	100	0,00	0,08	0	100	0,00	9,15	0
	Trnavský	100	0,00	0,09	0	100	0,00	6,98	0
	Žilinský	95	0,00	0,07	0	100	0,00	13,43	0
	Slovensko	93	0,00	189,98	0	0	17,90	3600,00	58
UFLP	Beasley	100	0,00	0,74	0	100	0,00	4,51	0
	Slovensko1000	100	0,00	10,45	0	86	0,00	1450,46	2

Tabuľka 3 Porovnanie vylepšených algoritmov založených na Erlenkotterovom prístupe

Vylepšený algoritmus pMBBDual s vylepšovacou heuristikou V1 je reprezentovaný algoritmom, kde metódou hrubého odhadu Lagrangeovho multiplikátora s fixnou hodnotou exponenta $\alpha = 1{,}1$ a parametrom delenia $r = 8$ hľadám najlepšie nastavenie Lagrangeovho multiplikátora. Vylepšenie získaného riešenia bolo dosiahnuté vkladacou heuristikou so stratégiou najlepší vhodný.

Vylepšený algoritmus pMedBBDual je reprezentovaný algoritmom pozostávajúci hlavne z metódy ICDA na získanie dolnej hranice, spôsobu spracovania vrcholu stromu vetvenia s počiatočným nastavením duálnych premenných (20)-(22), získania minimálnej množiny umiestnených stredísk s Erlenkotterovým usporiadaním zákazníkov a získania kandidáta na vetvenie vyhodnotením podmienok v poradí (25)->(23)->(26).

Vyhodnotenie experimentov na základe definovaných štatistík (viď Tabuľka 3) ukázalo, že algoritmus pMBBDual s vylepšovacou heuristikou je v porovnaní s algoritmom pMedBBDual mnohonásobne lepší v priemernom výpočtovom čase . Avšak algoritmus pMedBBDual poskytuje získanie optimálneho riešenia percentuálne vo väčšom počte testovaných prípadov. Výnimkou sú riešené kapacitne neobmedzené umiestňovacie úlohy (UFLP), kedy optimálne riešenie bolo percentuálne získané vo väčšom počte testovaných prípadov iteratívnym algoritmom pMBBDual. Napriek tomu, že semi-exaktný algoritmus pMBBDual je iteratívny algoritmus dokázal som ním spočítať úlohu váženého p-mediánu na celej Slovenskej sieti do jednej hodiny s 93% získaných optimálnych riešení, čo sa v prípade algoritmu pMedBBDual nepodarilo. Nevýhoda iteratívnosti algoritmu pMBBDual sa prejavila pri riešení úlohy p-mediánu na celej Slovenskej cestnej sieti, kde získanie optimálneho riešenia v 2. iterácii pri nastavenej hodnote Lagrangeovho multiplikátora *Lg* na 2048 bolo veľmi časovo náročné. Algoritmus pMedBBDual poskytol riešenie na úlohe p-mediánu na celom Slovensku za jednu hodinu výpočtového času, avšak či získané riešenie je optimálne neviem posúdiť vo väčšine prípadov, nakoľko bol algoritmus predčasne ukončený. Treba však zdôrazniť, že algoritmus pMedBBDual bez časového obmedzenia výpočtu vždy poskytne optimálne riešenie.

4.10 Kompozičný prístup k riešeniu návrhu verejného obslužného systému

Iteratívny semi-exaktný algoritmus pMBBDual s vylepšovacou heuristikou dokáže získať dobré prípustné riešenie za krátky výpočtový čas. Pod dobrým prípustným riešením rozumiem riešenie blízko optimálneho riešenia. Zovšeobecnený exaktný algoritmus pMedBBDual dokáže získať optimálne riešenie, ale za mnohonásobne vyšší výpočtový čas. V snahe nájsť kompromis medzi výpočtovým časom a získaním optimálneho riešenia som navrhol kompozičný prístup k riešeniu úlohy návrhu verejného systému. Pozostáva z dvoch fáz. V prvej fáze kompozičného algoritmu je riešenie získané iteratívnym semi-exaktným algoritmom pMBBDual s vylepšovacou heuristikou. V prípade, že získané riešenie nie je optimálne, je v druhej fáze toto riešenie spracované exaktným algoritmom pMedBBDual spolu so získanou dolnou a hornou hranicou riešenia. Získanie optimálneho riešenia úlohy predstavuje rovnosť dolnej hranice riešenia a hornej hranice riešenia. Kompozičný prístup som porovnal s navrhnutými algoritmami na základe *GoR* počtu získaných optimálnych riešení k celkovému počtu vykonaných experimentov pre testovaný benchmark v percentách, percentuálnom vyjadrení relatívnej odchýlky *Gap* medzi získanou hodnotou riešenia a dolnou hranicou riešenia v priemere a priemerného výpočtového času *pt* z časov jednotlivých experimentov na úlohách p-mediánu, váženého p-mediánu a kapacitne neobmedzených umiestňovacích úlohách.

Výsledky numerických experimentov (viď Tabuľka 4) potvrdzujú, že využitím kompozičného prístupu pre riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému dokážem získať optimálne riešenie úlohy v priemere za kratší výpočtový čas ako zovšeobecneným algoritmom pMedBBDual. Kompozičným prístupom sa podarilo získať optimálne riešenie vo väčšom počte riešených prípadov ako s navrhnutými algoritmami pMBBDual s vylepšovacou heuristikou alebo algoritmom pMedBBDual pri obmedzení výpočtového času na jednu hodinu. Optimálne riešenie som získal semi-exaktným iteratívnym algoritmom v 86% testovaných úloh, zovšeobecneným algoritmom v 77% testovaných úloh a kompozičným algoritmom v 97% testovaných úloh pri obmedzení výpočtového času na jednu hodinu a získaniu aspoň nejakého adekvátneho riešenia (tzn. bez úloh p-mediánu na Slovensku). Treba však zdôrazniť, že som bral do úvahy optimálne riešenia len s nulovým rozdielom (*gap*) medzi dolnou a hornou hranicou riešenia. Riešenie testovaných úloh váženého p-mediánu na celom Slovensku sa nám nepodarilo vylepšiť algoritmom pMedBBDual v kompozičnom prístupe ani po jednej hodine výpočtu. Kompozičný prístup nie je možné využiť pri úlohe p-mediánu na celom Slovensku, keďže tento prístup sa zakladá na získaní dobrého prípustného riešenia algoritmom pMBBDual s vylepšovacou heuristikou za krátky výpočtový čas, čo som v tomto prípade nezískal. Kompozičný algoritmus dokáže získať optimálne riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému vo väčšine prípadov za pomerne krátky výpočtový čas vzhľadom k rozsahu testovanej úlohy, čo považujem za prínos tejto práce.

		Vylepšený pMBBDual+V1			Vylepšený pMedBBDual			Kompozičný algoritmus		
úloha	Testovaný kraj	*GoR[%]*	*Gap[%]*	*pt [s]*	*GoR[%]*	*Gap[%]*	*pt[s]*	*GoR[%] [%]*	*Gap[%]*	*pt[s]*
p-medián	Bratislavský	73	0,26	0,05	100	0,00	0,15	100	0,00	0,16
	Banskobystrický	68	0,49	11,49	80	0,12	898,3	84	0,01	567,18
	Košický	70	0,37	42,97	52	0,18	1804,65	83	0,07	803,13
	Prešovský	70	0,58	383,15	70	0,15	1241,65	94	0,00	659,77
	Nitriansky	74	0,66	6,60	87	0,07	577,17	100	0,00	10,65
	Trenčiansky	72	0,26	0,22	100	0,00	4,84	100	0,00	1,1
	Trnavský	69	0,47	2,03	94	0,06	361,59	100	0,00	23,54
	Žilinský	60	0,95	0,49	100	0,00	125,43	100	0,00	4,1
	Slovensko	-	-	3600,00	3	10,46	3487,59	-	-	-
vážený p-medián	Bratislavský	100	0,00	0,02	100	0,00	0,39	100	0,00	0,02
	Banskobystrický	100	0,00	0,23	100	0,00	207,92	100	0,00	0,23
	Košický	100	0,00	0,21	100	0,00	147,7	100	0,00	0,21
	Prešovský	97	0,00	1,17	97	0,00	762,86	100	0,00	3,73
	Nitriansky	100	0,00	0,16	100	0,00	134,37	100	0,00	0,16
	Trenčiansky	100	0,00	0,08	100	0,00	9,15	100	0,00	0,08
	Trnavský	100	0,00	0,09	100	0,00	6,98	100	0,00	0,09
	Žilinský	95	0,00	0,07	100	0,00	13,43	100	0,00	0,23
	Slovensko	93	0,00	189,98	0	17,95	3600,00	93	0,00	423,61
UFLP	Beasley	100	0,00	0,74	100	0,00	4,51	100	0,00	0,74
	Slovensko1000	100	0,00	10,45	71	0,00	1450,46	100	0,00	10,45

Tabuľka 4 Porovnanie vylepšených algoritmov s kompozičným prístupom v kvalite riešenia a čase

5. ZÁVER

V práci som sa zaoberal aplikovaným výskumom v oblasti navrhovania verejných obslužných systémov s exaktným optimalizačným jadrom s využitím prostriedkov aplikovanej informatiky za účelom získania efektívneho softvérového nástroja na podporu rozhodovania o štruktúre verejného obslužného systému.

V úvodnej časti práce som sa zaoberal súčasným stavom riešenej problematiky v oblasti súvisiacej s cieľom práce. V tejto časti som prezentoval úlohu návrhu verejného obslužného systému a jeho špecifiká, kde som popísal niekoľko typových úloh spadajúcich do uvedenej oblasti. Analyzoval som najpoužívanejšie exaktné a semi-exaktné algoritmy z domácich aj zahraničných literárnych prameňov, ktoré boli zamerané na riešenie danej problematiky. Špeciálne som sa venoval Erlenkotterovmu prístupu k riešeniu kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy, ktorý je založený na metóde vetiev a hraníc a na vzťahoch z teórie duality k získaniu rýchlej a dobrej dolnej a hornej hranice riešenia.

Vo vlastnej výskumnej práci som sa zaoberal otázkou do akej miery je možné a výhodné využitie Erlenkotterovho prístupu k návrhu verejného obslužného systému spočívajúceho v riešení umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk v rámci výskumu metód navrhovania verejných obslužných systémov s exaktným optimalizačným jadrom pri využití prostriedkov aplikovanej informatiky.

Navrhol som iteratívny prístup s využitím Lagrangeovej relaxácie, ktorý umožnil transformovať úlohu návrhu verejného obslužného systému na kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu. Pre implementáciu iteratívneho prístupu som zostrojil semi-exaktný iteratívny algoritmus založený na Erlenkotterovom prístupe a Lagrangeovej relaxácii p-mediánovej podmienky. Erlenkotterovým prístupom som opakovane riešil kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu s meniacou sa hodnotou Lagrangeovho multiplikátora. Nastavenie Lagrangeovho multiplikátora, ktoré bolo pôvodne získavané metódou bisekcie som urýchlil metódou odhadu Lagrangeovho multiplikátora. Semi-exaktný iteratívny algoritmus, ktorý poskytuje dolnú a hornú hranicu riešenia, som rozšíril o vylepšovaciu heuristiku pre získanie lepšieho riešenia, pokiaľ algoritmus predtým nedosiahol optimálne riešenie.

Dosiahnutie optimálneho riešenia bolo rozpoznateľné na základe rovnosti dolnej a hornej hranice riešenia.

Navrhol som zovšeobecnený Erlenkotterov prístup na riešenie úlohy návrhu verejného obslužného systému založený na metóde vetiev a hraníc a poznatkoch z Erlenkotterovho prístupu. Na základe podrobného rozpracovania teórie duality pre riešený problém som skonštruoval exaktný algoritmus pre riešenie umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk. V rámci konštrukcie exaktného algoritmu som navrhol procedúru pre získanie dolnej hranice, hornej hranice, procedúru pre získanie kandidáta na vetvenie v metóde vetiev a hraníc a procedúru uskutočňujúcu samotnú metódu vetiev a hraníc.

Modifikoval som duálny prístup na získanie dolnej hranice riešenia realizovaný duálnym vzostupným algoritmom (DA) pre kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu. Navrhol som alternatívne metódy pre získanie dolnej hranice riešenia úlohy návrhu verejného obslužného systému, ktoré som porovnal a vybral najvhodnejšiu metódu.

Modifikoval som duálny prístup k získaniu hornej hranice riešenia umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk. Navrhol som viaceré metódy pre získanie hornej hranice spracovaného vrcholu v metóde vetiev a hraníc založené na dodržiavaní komplementárnych podmienok pri konštrukcii primárneho riešenia s rôznym poradím spracovania zákazníkov, porovnal ich a vybral najvhodnejšiu metódu.

Modifikoval som výber kandidáta na vetvenie v metóde vetiev a hraníc a navrhol som viaceré metódy založené na rôznom poradí vyhodnotenia komplementárnych podmienok, porovnal som ich a vybral som najvhodnejšiu metódu.

Výsledkom výskumnej práce bol návrh základných algoritmov s Erlenkotterovým prístupom k riešeniu danej problematiky a ich vylepšených verzií získaných výskumom jednotlivých procedúr algoritmu pre riešenie úlohy p-mediánu, váženého p-mediánu alebo kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy ako úlohy návrhu verejného obslužného systému. Urýchlil som postup najvhodnejšieho nastavenia Lagrangeovho multiplikátora metódou hrubého odhadu, ktorá priniesla v porovnaní s pôvodnou metódou bisekcie v semi-exaktnom iteratívnom algoritme menší počet iterácii a tým aj celkovo menší výpočtový čas algoritmu. Semi-exaktný iteratívny algoritmus poskytuje optimálne riešenie, prípadne suboptimálne riešenie, ktoré zlepší pomocou vylepšovacej heuristiky.

V rámci vylepšenia zovšeobecneného exaktného prístupu som navrhol a experimentálne verifikoval takú kombináciu procedúr, ktorá urýchlila získanie optimálneho riešenia oproti pôvodnej verzii zovšeobecneného exaktného algoritmu.

Porovnal som vylepšené verzie iteratívneho a zovšeobecneného algoritmu s ohľadom na výpočtový čas a kvalitu získaného riešenia. Iteratívny algoritmus poskytuje kvalitné prípustné riešenie za pomerne krátku dobu výpočtu v závislosti od veľkosti riešenej úlohy. Naopak exaktný algoritmus poskytuje optimálne riešenie úlohy, ale niekedy za cenu extrémne dlhého výpočtového času. Preto som skúmal, aké dobré riešenie je algoritmus schopný získať v obmedzenej dobe výpočtu, čo v prípade, že vetviaci proces bol predčasne ukončení po jednej hodine, viedlo k zníženiu kvality získaného riešenia.

Ďalej som navrhol kompozičný prístup, ktorý kombinuje výhody navrhnutých algoritmov. V prvej fáze kompozičného algoritmu je získané riešenie iteratívnym semi-exaktným algoritmom s vylepšovacou heuristikou. V druhej fáze je toto riešenie spracované exaktným algoritmom spolu so získanou dolnou a hornou hranicou riešenia.

Prínosy mojej dizertačnej práce môžem rozdeliť do dvoch oblastí. V praktickej oblasti som navrhol kolekciu nástrojov pre úlohy návrhu verejného obslužného systému. Jednotlivé nástroje sa líšia na základe preferovaného kritéria, či je to časové kritérium alebo kritérium exaktnosti. Vedie to k výberu nástroja na základe užívateľom preferovaného kritéria. Prínosom práce v teoretickej oblasti sú poznatky o exaktnosti a semi-exaktnosti metód riešenia. Exaktnosť predstavuje poskytnutie optimálneho riešenia, zatiaľ čo semi-exaktnosť predstavuje poskytnutie prípustného riešenia aj s dolnou hranicou riešenia. Študoval som počet prípadov, kedy iteratívny algoritmus získa exaktné riešenie, pričom beriem do úvahy len optimálne riešenia s nulovým rozdielom medzi dolnou a hornou hranicou riešenia. Keď nebolo získané exaktné riešenie, vyhodnocoval som maximálnu možnú odchýlku získaného riešenia od exaktného riešenia, čo je rozdiel medzi získanou hornou a dolnou hranicou riešenia. V zovšeobecnenom exaktnom algoritme som študoval počet prípadov, kedy algoritmus pri časovo obmedzenom behu získa exaktné riešenie. V prípade prekročenia určeného času algoritmu (jedna hodina) som vyhodnocoval odchýlku získaného riešenia od dolnej hranice riešenia.

Z tohto pohľadu možno uvedené softvérové nástroje na podporu rozhodovania o štruktúre verejného obslužného systému považovať za prínos v oblasti aplikovanej informatiky. Výsledky môjho výskumu poukázali na prínosy a limity využitia Erlenkotterovho prístupu k návrhu verejného obslužného systému spočívajúceho v riešení umiestňovacej úlohy s obmedzeným počtom vybudovaných stredísk.

SUMMARY

DESIGNING THE PUBLIC SERVIS SYSTEMS WITH AN EXACT OPTIMIZATION CORE

A public service system structure is formed by deployment of a limited number of the service centers and the associated objective is to minimize total costs. Designing a public service system, including medical emergency system, fire-brigade deployment, public administration system and many others, can often bring along some overall combinatorial problems concerning the system structure. The public service system design is NP hard problem and often related to the uncapacitated facility location problem or p-median problem. This problem is formulated as a task of determination of at most *p* network nodes as facility locations. The number of possible service center locations seriously impacts the computational time. To obtain good decision on facility location in any serviced area, a mathematical model of the problem can be formulated and some of mathematical programming methods can be applied to find the optimal solution. Real instances of the problem are characterized by big numbers of possible service center locations, which can take the value of several hundreds or thousands. The optimal solution of solved problem can be obtained by the universal IP solvers only for smaller instances of the problem. The universal IP solvers are very time consuming and often fail when solving a large instance. Many authors have dealt with this problem. Erlenkotter designed one of the most effective algorithm for solving the uncapacitated facility location problem. Erlenkotter approach is based on the branch and bound method, theory of duality and using dual solution to obtaining the lower and upper bound of solution.

The public service system design represents solving the p-median location problem which is combination of the p-median problem and the uncapacitated facility location problem. We designed two approaches for solving the public service system design. First approach is based on the Erlenkotter approach and the Lagrangean relaxation of the constraint which limits number of the located center. Lagrangean relaxation provides transformation of p-median location problem to the uncapacitated facility location problem. The quality of the resulting solutions depends on the convenient setting of the Lagrangean multiplier which is obtained by a bisection algorithm. We designed the better alternative to the most convenient setting of the Lagrangean multiplier based on the estimation of Lagrangean multiplier. Iterative semi-exact approach provides a near-to-optimal solution and a lower bound of solution, so we improved the near-to-optimal solution with an insertion heuristic with the best admissible strategy. Second approach is based on the generalization of the Erlenkotter approach and branch and bound method. We generalized the Erlenkotter dual approach to the lower and upper bounding to be able to solve the associated location problem with the restricted number of the located service centers. We improved designed approach using the most appropriate combination of methods for obtaining candidates to the branching, the lower and upper bound. We compared designed approaches to the solving the public services system design in quality of the obtained solution and the computational times on the Beasley benchmarks and benchmarks from the Slovak road network. Iterative semi-exact approach provides only near-to–optimal solution, but in short computational time. Generalized exact approach provides optimal solution, but sometimes with extreme long time. We designed the compositional approach based on two phases. First phase represents obtaining near-to-solution with semi-exact iterative approach with improving heuristic. Second phase represents improvement of the obtained solution with the generalized exact approach using the lower and upper bound of solution from first phase. Designed compositional approach gives the possibility of using the Erlenkotter approach to the solving of the public service system design, which we consider for the main benefit of my thesis.

Keywords: Public service system design, location problem, Erlenkotter approach, Lagrangean relaxation, branch and bound method, generalized exact approach, semi-exact iterative approach, compositional approach.

ZOZNAM PRÁC AUTORA Z OBLASTI SKÚMANEJ PROBLEMATIKY

[1] BENDÍK, J. (2013). *Exact algorithm for Location Problem Solving in Public Service System Design.* In: Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2013 : SW nástroje na řešení úloh racionalizace. Objektivizace a optimalizace pokrytí území veřejnými obslužnými systémy: Pardubice, Česká republika 28.-29.10.2013, ISBN 978-80-7395-744-5, pp. 7-15.

[2] BENDÍK, J. (2014). *Generalization of the Erlenkotter approach for solving of the public service system design*. In. Proceedings of ICTTE 2014: International Conference on Traffic and Transport Engineering: Belgrade, Serbia, November 27-28, 2014, ISBN 978-86-916153-1-4, pp. 12-17.

[3] BENDÍK, J. (2014) *Heuristics for improving the solution of p-median location problem with Erlenkotter approach*. In Proceedings of the 10th international conference Digital technologies: Žilina, Slovakia, 9-11 July, 2014, ISBN 978-1-4799-3301-3, pp. 7-11.

[4] BENDÍK, J. (2015). *Improving the exact algorithm for solving the public service system design in the branching*. In SOR ´15 : Proceedings of the 13th International Symposium on Operational Research: Bled, Slovenia, September 23-25, 2015, ISBN 978-961-6165-45-7, pp. 215-220.

[5] BENDÍK, J. (2015). *Increment approach for obtaining the lower bound in public service system design*. In Proceedings of the 4th international symposium and 26th national conference on operational research: Chania-Greece, June 4-6, 2015, ISBN 978-618-80361-4-7, pp. 230-234.

[6] BENDÍK, J. (2015). *Selection of minimal set of locations in the public service system design*. In Proceedings of Informatics 2015 : IEEE 13th international scientific conference on informatics: Poprad, Slovakia, November 18-20, 2015, ISBN 978-1-4673-9867-1, pp. 47-51.

[7] BENDÍK, J. (2014). *Solving the p-median location problem with the Erlenkotter approach in public service system design.* In 4th Student Conference on Operational Research: Nottingham, UK, May 2-4, 2014, Saarbrücken/Wadern: Dagstuhl Publishing, ISBN 978-3-939897-67-5, pp. 25-33.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] AVELLA, P., SASSANO, A., VASSIL´EV, I. (2007). *Computational study of large scale p-median problems*. In Mathematical Programming 109, 2007, pp. 89-114

[2] BALINSKI, M. (1965). *Integer programming: methods, uses computation*. In Management Science, 12, 1965, pp. 254–313

[3] BARILLA, J., SIMR, P., SÝKOROVÁ, K. (2013). *Microsoft Excel 2013: Podrobná uživatelská příručka*, Brno: Computer Press, 2013, ISBN 978-80-251-4114-4, 496 s.

[4] BEASLEY, J. E. (1993). *Lagrangean heuristics for location problems*. In European Journal of Operational Research 65(3), 1993, pp. 383-399

[5] BEASLEY, J. E. (1993). *Lagrangean relaxation*. In Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, Oxford Blackwell Scientific Publications, London, 1993, ISBN 0-632-03238-3, pp. 243-303

[6] BEASLEY J. E. (1990), *OR Library*: *Distributing Test Problems by Electronic Mail*. Journal of the Operational Research Society, 41(11), pp. 1069-1072

[7] BENDÍK J. (2013). *Exaktný algoritmus na riešenie umiestňovacích úloh v návrhu verejného obslužného systému* diplomová práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, 88 s.

[8] BENDÍK, J. (2013). *Exact algorithm for Location Problem Solving in Public Service System Design*. In: Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2013 : SW nástroje na řešení úloh racionalizace. Objektivizace a optimalizace pokrytí území veřejnými obslužnými systémy: Pardubice, Česká republika 28.-29.10.2013, ISBN 978-80-7395-744-5, pp. 7-15.

[9] BENDÍK, J. (2014). *Generalization of the Erlenkotter approach for solving of the public service system design*. In. Proceedings of ICTTE 2014: International Conference on Traffic and Transport Engineering: Belgrade, Serbia, November 27-28, 2014, ISBN 978-86-916153-1-4, pp. 12-17.

[10] BENDÍK, J. (2014) *Heuristics for improving the solution of p-median location problem with Erlenkotter approach*. In Proceedings of the 10th international conference Digital technologies: Žilina, Slovakia, 9-11 July, 2014, ISBN 978-1-4799-3301-3, pp. 7-11.

[11] BENDÍK, J. (2015). *Improving the exact algorithm for solving the public service system design in the branching*. In SOR ´15 : Proceedings of the 13th International Symposium on Operational Research: Bled, Slovenia, September 23-25, 2015, ISBN 978-961-6165-45-7, pp. 215-220.

[12] BENDÍK, J. (2015). *Increment approach for obtaining the lower bound in public service system design*. In Proceedings of the 4th international symposium and 26th national conference on operational research: Chania-Greece, June 4-6, 2015, ISBN 978-618-80361-4-7, pp. 230-234.

[13] BENDÍK, J. (2015). *Selection of minimal set of locations in the public service system design*. In Proceedings of Informatics 2015 : IEEE 13th international scientific conference on informatics: Poprad, Slovakia, November 18-20, 2015, ISBN 978-1-4673-9867-1, pp. 47-51.

[14] BENDÍK, J. (2014). *Solving the p-median location problem with the Erlenkotter approach in public service system design.* In 4th Student Conference on Operational Research: Nottingham, UK, May 2-4, 2014, Saarbrücken/Wadern: Dagstuhl Publishing, ISBN 978-3-939897-67-5, pp. 25-33.

[15] BUZNA, Ľ. (2010). *Informatické nástroje pre návrh obslužných systémov na priestorovo rozľahlých sieťach*: habilitačná práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, 2010, 91 s.

[16] CORNUÉJOLS, G., NEMHAUSER, G.L., WOLSEY, L.A. (1980). *A canonical representation of simple plant location problems and its applicaitons*. In SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 1 (3), 1980, pp. 261-272

[17] CORNUÉJOLS, G., NEMHAUSER, G.L., WOLSEY, L.A. (1990). *The uncapacitated facility location problem*. In P. B. Mirchandani, P., B., Francis, R., L., (Eds.), Discrete location theory, New York: Wiley, 1990, pp. 119–171

[18] CUDRÁK, P. (2011). *Informatický nástroj na hľadanie stredísk verejného obslužného systému v rozľahlej sieti*: diplomová práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, 83 s.

[19] DASKIN, M. S. (2013). *Network and Discrete Location. Models, Algorithms, and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 2013

[20] DREZNER, Z., HAMACHER, H.W. (2002) *Facility location: Applications and theory*, Berlin: Springer, 2002.

[21] DREZNER, Z. (1984) *The p-Centre Problem - Heuristic and Optimal Algorithms*. The Journal of the Operational Research Society, Vol. 35, No. 8, 1984, pp. 741 -748.

[22] ERLENKOTTER, D. (1978). *A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location*. Operations Research, Vol. 26, No 6, 1978, pp. 992-1009

[23] GALVAO, R. D. (1980). *A dual-bounded algorithm for the p-median problem*. In Operations Research 28, 1980, pp. 1112-1121

[24] GARCIA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. (2011). *Solving large p-median problems with a radius formulation*. In INFORMS Journal on Computing 23 (4), 2011, pp. 546-556

[25] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, 1979

[26] HAKIMI, S. L., KARIV, O. (1979). *An algorithmic approach to network location problems II: The p-medians*. In *SIAM J. Appl. Math. Oper. Res.* 37(3), pp. 539–560

[27] JANÁČEK, J. a kol. (2010). *Navrhovanie územne rozľahlých obslužných systémov*, Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2010, ISBN 978-80-554-0219-2, 404 s.

[28] JANÁČEK, J. (2000). *Dopravno-optimálny rozklad regiónu*, In Communications - scientific letters of the University of Žilina 2(4), pp. 35-42.

[29] JANÁČEK, J. (2014). *Mikrooptimalizace výpočetních postupů v metaheuristikách pro umísťovací úlohy*. In Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2014 : SW podpora rozhodování v inteligentních dopravních systémech, Pardubice, 2014, ISBN 978-80-7395-867-1. pp. 4-9.

[30] JANÁČEK, J., KOVAČIKOVÁ, J. (1997). *Exact Solution Techniques for Large Location Problems*. In Proceedings of the Mathematical Methods in Economics 1997, Ostrava, 9.-11.9.1997, pp. 80-84

[31] JANÁČEK, J. (2003). *Matematické programování*. Druhé opravené vydanie, Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2003, ISBN 80-8070-054-0, 225 s.

[32] JANÁČEK, J. (2006). *Optimalizace na dopravních sítích*. Druhé prepracované vydanie. Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2006, ISBN 80-8070-586-0, 248 s.

[33] JANÁČEK, J., BUZNA, Ľ. (2008). *An acceleration of Erlenkotter-Körkel's algoriths for uncapacitated facility location problem*. In Annals of Operations Research, 2008, Vol. 164, No. 1, ISSN 0254-5330, pp. 97-109.

[34] JANÁČEK, J.; KOHÁNI, M.; BUZNA, Ľ. (2014) *An Approximation Algorithm for the Facility Location Problem with Lexicographic Minimax Objective* In Journal of Applied Mathematics, 2014, ISSN 1110-757X, pp. 1-12.

[35] JANÁČEK, J., KVET, M. (2012). *Relevant network distances for approximate approach to the p-median problem.* In Operations Research Proceedings 2012: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR 2012), September 4-7 2012, Leibniz Univesität Hannover, Germany, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012, s. 99

[36] JANÁČEK, J. (2008). *Approximate Covering Models of Location Problems*. In Lecture Notes in Management Science: Proceedings of the 1st International Conference on Applied Operational Research - ICAOR ´08, Vol. 1, September 2008, Yerevan, Armenia, ISSN 2008-0050, pp. 53-61.

[37] KÖRKEL, M. (1989). *On the exact solution of large – scale simple plant location problem*. In European Journal of Operational Research 39, North Holland, pp. 157-173.

[38] KVET, M. (2013) *Navrhovanie verejných obslužných systémov metódami pokrývania*: dizertačná práca, Žilina: Žilinská Univerzita, 2013, 143 s.

[39] LAPORTE, G.; NICKEL, S. (2015) *Location Science*, New York: Springer-Verlag, 2015, pp. 642

[40] MARKECHOVÁ, D.; TIRPÁKOVÁ, A.; STEHLÍKOVÁ, B. (2011). *Základy štatistiky pre pedagógov*, Nitra: FPV UKF, 2011, p. 405.

[41] MLADENOVIČ, N. et al. (2007). *The p-median problem: a survey of metaheuristic approaches*. In European Journal of Operational Research, 179(3), 2007, pp. 927–939.

[42] OGRYCZAK, W.; ŚLIWIŃSKI, T. (2006). *On Direct Methods for Lexicographic Min-Max Optimization, ICCSA*, vol. 3982, 2006, pp. 802- 811.

[43] OR-Lib benchmarks, [posledný prístup 2016-04-13], dostupné na internete: http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/pmedinfo.html

[44] PLESNÍK, J. (1983) *Grafové algoritmy,* Bratislava: VEDA, 1983.

[45] REESE, J. (2006). *Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography*. In *Networks* 48(3), pp. 125–142, DOI 10.1002/net.20128, Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)

[46] RESENDE, M.G.C. and WERNECK, R. F.. (2003). *On the Implementation of a Swap-Based Local Search Procedure for the p-Median Problem.* In R.E. Ladner (ed.), Proceedings of the Fifth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'03), SIAM, pp. 119–127.

[47] RESENDE, M. G. C., WERNECK, R. F. (2004). *A Hybrid Heuristic for the p-Median Problem*. In Journal of Heuristics, volume 10, number 1, 2004, pp. 59-88

[48] SZENDREYOVÁ A. *Benchmarks - vzorové riešené úlohy,* [posledný prístup 2016-04-13], dostupné na internete: http://frdsa.fri.uniza.sk/~betka/indexPovodny.html.

[49] TOMAN, Ľ. (2013). *Sofistikované nástroje na podporu rozhodovania v podmienkach neistoty pri návrhu verejných obslužných systémov evakuačného typu*: dizertačná práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, 2013

[50] XPRESS Optimization Suite - Student Edition, [posledný prístup 2016-04-13], dostupné na internete: https://community.fico.com/download.jspa

[51] XPRESS-Mosel "User guide", Dash Associates, Blisworth, 2005, UK, 99 s.