ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

AUTOREFERÁT
DIZERTAČNEJ PRÁCE

Žilina, apríl 2013

Ing. Marek Kvet

Žilinská univerzita v Žiline
Fakulta riadenia a informatiky

Ing. Marek Kvet

Autoreferát dizertačnej práce

Navrhovanie rozsiahlych verejných obslužných systémov metódami pokrývania

na získanie akademického titulu **„Philosophiae doctor“ (v skratke PhD.)**
v študijnom programe doktorandského štúdia
aplikovaná informatika

v študijnom odbore:
9.2.9 aplikovaná informatika

Žilina, apríl 2013

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia **na Katedre dopravných sietí, Fakulte riadenia a informatiky Žilinskej univerzity v Žiline.**

Predkladateľ: **Ing. Marek Kvet**
Žilinská univerzita v Žiline
Fakulta riadenia a informatiky
Katedra dopravných sietí

Školiteľ: **Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.**
Žilinská univerzita v Žiline
Fakulta riadenia a informatiky
Katedra dopravných sietí

Oponenti:

Autoreferát bol rozoslaný dňa: ....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o .... h. pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce schválenou odborovou komisiou v študijnom odbore **9.2.9 Aplikovaná informatika**, **v študijnom programe Aplikovaná informatika** vymenovanou dekanom Fakulty riadenia a informatiky Žilinskej univerzity v Žiline dňa

....

Prof. Ing. Martin Klimo, PhD.
predseda odborovej komisie
študijného programu Aplikovaná informatika
v študijnom odbore 9.2.9 Aplikovaná informatika

Žilinská univerzita v Žiline
Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 8215/1
010 26 Žilina

1. ÚVOD

Dizertačná práca sa zaoberá strategickými rozhodnutiami, konkrétne navrhovaním rozsiahlych verejných obslužných systémov pomocou univerzálnych softvérových nástrojov na podporu rozhodovania. Táto oblasť je dlhodobo jednou z nosných výskumných tém Katedry dopravných sietí na Fakulte riadenia a informatiky Žilinskej univerzity v Žiline. Strategické rozhodnutia o umiestnení obslužných stredísk tak, aby celkové náklady boli minimálne, predstavujú zložitú kombinatorickú úlohu, ktorej riešením možno dosiahnuť pozoruhodné úspory alebo zlepšenie kvality poskytovanej služby [45].

V rozsiahlych dopravných sieťach sa často stretávame s požiadavkou navrhnúť štruktúru verejných obslužných systémov, akými sú napríklad záchranná zdravotná služba [16], [43], sieť nemocníc [60], stanice Hasičského a záchranného zboru [45], policajné zložky, úrady štátnej správy [14] a mnohé iné. Vo väčšine prípadov ide o systémy, v ktorých je sa má rozmiestniť istý, ekonomickými dôvodmi obmedzený, počet obslužných stredísk tak, aby navrhnutý systém garantoval požadovanú kvalitu poskytovanej služby. Zároveň sa vyžaduje, aby kvantifikované kritérium kvality návrhu nadobudlo čo najlepšie hodnoty. Samotné kritérium kvality je obvykle vyjadrené nákladmi na obsluhu zákazníkov za určité obdobie, priemernou dobou čakania na službu a podobne [31]. Vo svojej práci som sa však obmedzil len na také úlohy, kde sa minimalizuje hodnota účelovej funkcie zohľadňujúca priemernú, resp. celkovú vzdialenosť medzi zákazníkmi a ich obsluhujúcimi strediskami [53], [54]. Tieto problémy sú najčastejšie formulované ako úlohy *p*-mediánu, ktoré modelujeme prostriedkami celočíselného lineárneho programovania. Ich najväčším negatívom je fakt, že okrem základného rozhodnutia o tom, v ktorých miestach siete majú byť vybudované obslužné strediská, je mnohokrát potrebné rozhodnúť aj o tom, ktorý obsluhovaný objekt bude prislúchať ku ktorému vybudovanému stredisku. To spôsobuje, že príslušný matematický model obsahuje veľmi veľké množstvo rozhodovacích premenných a štrukturálnych podmienok. Nájdenie optimálneho riešenia lokačno-alokačnej úlohy veľkého rozsahu si tak vyžaduje obrovskú pamäťovú kapacitu a výpočtový čas. To je hlavný dôvod, prečo algoritmy integrované do bežných softvérových nástrojov na podporu rozhodovania pri takýchto úlohách často zlyhávajú [31], [68]. Celkový počet zákazníkov ako aj možných umiestnení stredísk sa zvyčajne pohybuje rádovo v tisícoch [2]. Takéto úlohy preto riešime špecializovanými softvérovými nástrojmi.

Na druhej strane existuje trieda umiestňovacích úloh, tzv. *pokrývacie úlohy*, ktoré sú riešiteľné pomocou univerzálnych softvérových nástrojov pomerne rýchlo aj pri veľkom rozsahu, hoci patria do skupiny NP-ťažkých úloh [23]. Vo svojom výskume som sa zaoberal možnosťami využitia výhodných vlastností pokrývacích úloh na efektívne riešenie tých problémov, ktoré možno previesť priamo na pokrývaciu úlohu alebo modelovať takým spôsobom, že príslušný matematický model zachová uvedené vlastnosti pokrývacích úloh. Keďže rozsiahle úlohy *p*-mediánu predstavujú ťažko riešiteľný kombinatorický problém, stali sa metódy jeho riešenia jednou z aktuálnych výskumných tém aplikovanej informatiky.

V oblasti optimalizačných metód hľadám nové možnosti uplatnenia všeobecných softvérových nástrojov, akým je i prostredie XPRESS [99]. V dizertačnej práci prezentujem efektívne postupy aproximatívneho riešenia umiestňovacích úloh ich prevedením na časovo menej náročný typ pokrývacej úlohy. Každá aproximácia však musí byť niečím zaplatená. V tomto prípade zaplatím stratou presnosti nájdeného riešenia.

Princíp transformácie pôvodného lokačno-alokačného modelu je založený na hornom, resp. dolnom odhade vzdialeností medzi zákazníkmi a ich obsluhujúcimi strediskami pomocou špecificky zvolených vzdialeností, tzv. *deliacich bodov* [53]. Ich výber výrazne ovplyvňuje presnosť získaného riešenia. Na dosiahnutie lepších výsledkov bola navrhnutá a implementovaná sekvenčná metóda zónovania [54] spolu s pomocnými technikami, ktoré slúžia na zrýchlenie algoritmu, prípadne na zvýšenie jeho presnosti. Ako ukážem na príkladoch, presnosť riešenia, ako aj výpočtový čas, závisia od voľby parametrov aproximácie. Preto sa zameriam predovšetkým na to, akým spôsobom je možné využiť prostriedky komerčného IP-solvera XPRESS na zefektívnenie navrhnutej metódy, či už pomocou sekvenčného zónovania, alebo implementáciou algoritmov na nájdenie vhodných hodnôt parametrov. Takto chcem preukázať efektívnosť aproximatívneho pokrývacieho prístupu na riešenie rozsiahlych úloh *p*-mediánu.

Navrhnutý pokrývací prístup porovnávam v dizertačnej práci s dostupnými metódami riešenia rozsiahlych úloh p-mediánu nielen z hľadiska presnosti riešenia, ale aj z pohľadu náročnosti na výpočtový čas. Svoje výsledky porovnávam s výsledkami prác iných autorov na reálnych úlohách veľkého rozsahu, prípadne s ich optimálnym riešením, ak je známe. Zdrojom testovacích úloh sú voľne dostupné knižnice benchmarkov.

2. SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY

Kapitola popisujúca súčasný stav riešenej problematiky začína definíciou verejného obslužného systému, jeho štruktúry a tiež niekoľkých súvisiacich pojmov, ktoré sa objavujú v celom texte dizertačnej práce. Okrem toho sa v tejto kapitole nachádza stručná klasifikácia obslužných systémov s niekoľkými príkladmi. Následne je pozornosť venovaná matematickému modelovaniu umiestňovacích úloh s ohľadom na možné kritéria kvality.

Spomedzi najznámejších úloh uvádzam modely kapacitne neobmedzenej lokačnej úlohy [18], pokrývacej úlohy [94] a v neposlednom rade sa zameriavam na rozsiahle úlohy p-mediánu, ktorých riešenie pomocou koncepcie pokrytia bolo hlavnou témou môjho aplikovaného výskumu. Pri každej typovej úlohe uvádzam i niekoľko praktických aplikácií. Okrem základnej lokačno-alokačnej formulácie úlohy p-mediánu detailne analyzujem možnosti transformácie príslušného modelu na iné úlohy s cieľom využitia špecializovaných algoritmov a procedúr ako *BBDual*, *PDLoc* a ďalších.

V druhej časti sú uvedené základné charakteristiky univerzálnych a špecializovaných softvérových nástrojov na podporu rozhodovania a princípy fungovania najpoužívanejších algoritmov riešenia úloh navrhovania verejných obslužných systémov. Základnou metódou riešenia úloh celočíselného lineárneho programovania (teda aj úlohy p-mediánu) je metóda vetiev a hraníc, na ktorej sú postavené ďalšie, zväčša špecializované algoritmy na riešenie kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy. Vhodnými úpravami modelu možno dosiahnuť riešiteľnosť pôvodnej úlohy aj týmito algoritmami.

Okrem exaktných metód sa v prehľade súčasného stavu riešenej problematiky venujem aj niekoľkým heuristickým a metaheuristickým algoritmom, pričom načrtávam ich výhody a nevýhody v porovnaní s navrhnutým pokrývacím prístupom. Ten je založený na výhodných vlastnostiach pokrývacích úloh, ktoré umožňujú využiť bežne dostupné univerzálne IP-solvery. Samozrejmou súčasťou je bohatý prehľad domácich i zahraničných literárnych prameňov zameraných nielen na aplikácie skúmaných úloh návrhu štruktúry obslužných systémov, ale aj na algoritmy ich riešenia.

Na záver predkladám prevod pôvodnej lokačno-alokačnej formulácie úlohy p-mediánu na model pokrývacej úlohy. Reformulácia modelu je postavená na princípe zónovania jednotlivých vzdialeností medzi zákazníkmi a ich obsluhujúcimi strediskami pomocou deliacich bodov, čo ukážem neskôr. Práve pomocou systému zón dokážeme ľubovoľnú vzdialenosť aproximovať zhora i zdola. Využitie pokrývacieho modelu na riešenie úlohy p-mediánu sa v literatúre objavilo vo viacerých verziách [20], [32]. Vo svojom výskume som nadviazal na myšlienku spoločného systému zón pre všetkých zákazníkov, čím sa odlišujem od iných autorov, ktorí vyvinuli exaktný algoritmus *ZEBRA* [20] postavený na unikátnom systéme zón pre každého zákazníka.

3. CIELE A METODIKA PRÁCE

Hlavným cieľom dizertačnej práce je hľadanie vhodných a efektívnych riešení rozsiahlych lokačno-alokačných úloh ich transformáciou na pokrývacie úlohy s využitím univerzálnych softvérových nástrojov (XPRESS). Splnenie tohto cieľa v sebe zahŕňa aplikovaný výskum zameraný na návrh, implementáciu a overenie viacerých algoritmov riešenia úloh prevažne strednej veľkosti.

Pokrývací prístup k riešeniu úloh p-mediánu je založený na tzv. *zónovaní* jednotlivých vzdialeností. Dostupná literatúra uvádza tento prístup v dvoch verziách, pričom ja nadviažem na myšlienku použitia spoločného systému zón pre všetkých zákazníkov. V predbežných experimentoch sa vzdialenosti delili rovnomerne do niekoľkých zón (ich počet bol stanovený) alebo bola daná konštantná veľkosť zóny. Preto bude mojou prvoradou úlohou nájdenie vhodného spôsobu voľby deliacich bodov oddeľujúcich jednotlivé zóny tak, aby sa minimalizovala celková chyba odhadu vzdialeností pri ich hornom, resp. dolnom odhade. Týmto prístupom sa výrazne odlišujem od všetkých doteraz publikovaných prác. Ďalšie ciele, ktorým sa budem v nasledujúcich kapitolách venovať, možno zhrnúť do niekoľkých bodov:

- Aplikovať aproximatívny pokrývací prístup s horným, resp. dolným odhadom vzdialeností na veľmi rozsiahle úlohy, pri ktorých nie je možné využiť exaktné metódy ich riešenia.
- Vyšetriť vplyv počtu deliacich bodov na presnosť riešenia vo vzťahu k úspore výpočtovému času.
- Navrhnúť a implementovať adaptívny algoritmus na hľadanie vhodnej hodnoty parametra, ktorý ovplyvňuje odhad početností výskytov jednotlivých vzdialeností v optimálnom riešení úlohy a tým aj voľbu deliacich bodov. Deliace body sa budú počítať exaktným spôsobom.
- Preskúmať možnosť sekvenčného zónovania, teda iteratívnu úpravu deliacich bodov a jej vplyv na možné zlepšenie. Následne stanoviť vhodné kritériá na zastavenie iteratívneho prístupu.
- Overiť kombináciu horného a dolného odhadu vzdialeností na spoločných deliacich bodoch sekvenčnej metódy s možným skrátením doby výpočtu.
- Definovať a matematicky formulovať relevantnosť vzdialeností pre výpočet deliacich bodov.
- Vyhodnotiť presnosť a časovú náročnosť metód v závislosti na rozsahu úloh a príslušných parametroch.
- Vykonať numerické experimenty na dostatočne veľkej množine testovacích úloh a vyšetriť vlastnosti navrhnutých postupov za účelom porovnania výsledkov s inými metódami publikovanými v literatúre.
- Rozšírením dizertačnej práce je zovšeobecnenie pokrývacieho prístupu na riešenie rozsiahlych úloh váženého *p*-mediánu, prípadne ďalších optimalizačných úloh.

Na riešenie vyššie popísaných problémov využijem prostriedky celočíselného lineárneho programovania. Vďaka výhodným vlastnostiam pokrývacích úloh sa otvára možnosť použitia bežne dostupných univerzálnych softvérových nástrojov na podporu rozhodovania, akým je optimalizačné prostredie XPRESS [99], [100]. Funkčnosť a vlastnosti navrhnutých metód overím experimentálne na dostatočne veľkej množine testovacích úloh, ktorú získam z voľne dostupných zdrojov na internete.

4. VÝSLEDKY A ICH VYHODNOTENIE

4.1 LOKAČNO-ALOKAČNÝ MODEL ÚLOHY

Všeobecný problém *p*-mediánu je definovaný ako úloha výberu najviac *p* prvkov z množiny kandidátov na umiestnenie strediska tak, aby celková suma vzdialeností medzi zákazníkmi a ich obsluhujúcimi strediskami bola čo najnižšia. Symbolom I označím množinu kandidátov a symbolom J množinu zákazníkov. Vzdialenosť medzi kandidátom $i \in I$ a zákazníkom $j \in J$ je daná konštantou d_{ij}. V klasickej úlohe *p*-mediánu je potrebné rozhodnúť nielen o tom, v ktorých uzloch siete majú byť zriadené obslužné strediská, ale aj o tom, ktorý zákazník bude priradený ku ktorému vybudovanému stredisku. Rozhodnutie o vybudovaní strediska v uzle $i \in I$ bude modelované bivalentnou premennou $y_i \in \{0, 1\}$. Ak stredisko na danom mieste vybudujeme, príslušná premenná nadobudne hodnotu 1, inak sa bude rovnať 0. Rovnako je potrebné definovať priraďovacie premenné z_{ij} pre každú usporiadanú dvojicu $[i, j]$, kde $i \in I$ a $j \in J$. Ak bude zákazník j priradený stredisku i, potom položíme $z_{ij} = 1$, inak bude $z_{ij} = 0$. Matematický model úlohy možno zapísať nasledovne:

$$\mathit{Minimize} \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} z_{ij} \tag{1}$$

$$\mathit{Subject\ to:} \quad \sum_{i\in I} z_{ij} = 1 \quad \mathit{for}\ j \in J \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} y_i \le p \tag{3}$$

$$z_{ij} \le y_i \quad \mathit{for}\ i \in I, j \in J \tag{4}$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \mathit{for}\ i \in I \tag{5}$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \mathit{for}\ i \in I, j \in J \tag{6}$$

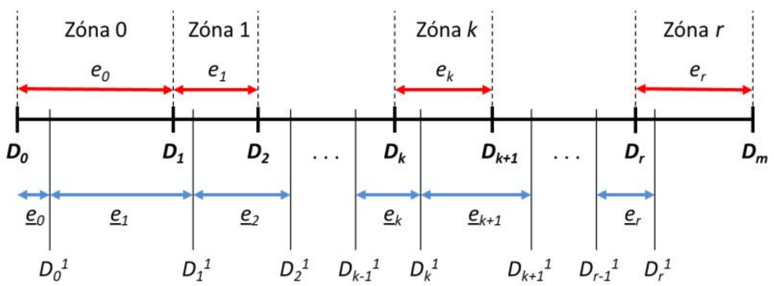
Účelová funkcia (1) vyjadruje celkovú vzdialenosť medzi zákazníkmi a ich obsluhujúcimi strediskami. Sústava štrukturálnych podmienok (2) zabezpečí, že každý zákazník bude priradený práve jednému stredisku. Na túto podmienku priamo nadväzuje požiadavka, že zákazníka možno priradiť len k takému stredisku, ktoré je vybudované. To zabezpečí sústava štrukturálnych podmienok (4). Podmienka (3) stanovuje maximálny počet vybudovaných stredísk a ostatné podmienky udávajú definičný obor premenných.

Hlavným dôvodom, prečo algoritmy integrované do komerčných softvérových nástrojov pri takýchto úlohách často zlyhávajú, je fakt, že model (1) – (6) obsahuje príliš veľké množstvo priraďovacích premenných z_{ij} a väzobných štrukturálnych podmienok. Zo sústavy štrukturálnych podmienok (2) je zrejmé, že pre každého zákazníka $j \in J$ bude existovať iba jedna nenulová premenná z_{ij}. Teda, pre každého zákazníka j sa stáva relevantnou práve jedna hodnota z j-teho stĺpca matice vzdialeností $\{d_{ij}\}$ odpovedajúca vzdialenosti k najbližšiemu vybudovanému stredisku. Tento fakt je hlavným východiskom pre pokrývací prístup.

4.2 FORMULÁCIA POKRÝVACIEHO MODELU

Podstata pokrývacieho prístupu spočíva v relaxácii priradenia zákazníka k najbližšiemu vybudovanému stredisku a vylúčení priraďovacích premenných z modelu. Ak vezmeme do úvahy, že s každým zákazníkom je spojená práve jedna relevantná vzdialenosť, potom bude našim cieľom odhadnúť túto vzdialenosť zhora, resp. zdola. To nám umožní formulovať pokrývací model úlohy a využiť tak komerčný IP-solver na riešenie rozsiahlych úloh p-mediánu. Aby bolo možné ľubovoľnú vzdialenosť odhadnúť, je potrebné rozdeliť postupnosť hodnôt $<0, \max\{d_{ij}: i \in I, j \in J\}>$ v matici vzdialeností $\{d_{ij}\}$ do r+1 zón. Zóny sú oddelené postupnosťou *deliacich bodov* $D_1, D_2, \ldots, D_r$, pre ktoré platí, že $0 = D_0 < D_1$ a $D_r < D_m$, pričom $D_m = \max\{d_{ij}: i \in I, j \in J\}$. Jednotlivé zóny si označíme tak, že zóne k odpovedá interval $(D_k, D_{k+1}\rangle$, zóne 1 interval $(D_1, D_2\rangle$ a zóne r interval $(D_r, D_m\rangle$. Okrem toho zavedieme označenie e_k pre dĺžku každej zóny k, kde $k = 0, \ldots, r$. Hodnotu e_k vypočítame ako rozdiel hornej a dolnej hranice príslušného intervalu, teda $e_k = D_{k+1} - D_k$ pre $k = 0, \ldots, r$.

Okrem umiestňovacích premenných y_i zavedieme pre každého zákazníka $j \in J$ a každú zónu k premennú x_{jk}, ktorá bude nadobúdať hodnotu 1 vtedy, keď vzdialenosť zákazníka j od jeho najbližšieho vybudovaného strediska je väčšia ako D_k. V opačnom prípade bude $x_{jk} = 0$. Potom platí, že výraz $e_0x_{j0} + e_1x_{j1} + e_2x_{j2} + e_3x_{j3} + \ldots + e_rx_{jr}$ je horným odhadom ľubovoľnej vzdialenosti d_{ij} a výraz $e_0x_{j1} + e_1x_{j2} + e_2x_{j3} + e_3x_{j4} + \ldots + e_{r-1}x_{jr}$ je jej dolným odhadom. V praxi to znamená, že ak hodnota d_{ij} padne do intervalu $(D_k, D_{k+1}\rangle$, je odhadnutá zdola hodnotou D_k, zhora hodnotou D_{k+1} s maximálnou chybou e_k. Ako však ukážem ďalej, existuje lepší spôsob dolného odhadu. Vychádza z princípu tvorby zón a významu premenných x_{jk}, Uvažujme, že každý interval obsahuje niekoľko hodnôt z pôvodnej matice. Predpokladajme, že vzdialenosť medzi zákazníkom j a jeho najbližším vybudovaným strediskom padne do intervalu $(D_k, D_{k+1}\rangle$. Potom je odhadovaná vzdialenosť väčšia ako hodnota D_k, ale nanajvýš rovná hodnote D_{k+1}. Preto ju zhora odhadneme hodnotou D_{k+1}, avšak dolný odhad je možné zlepšiť. Namiesto hodnoty D_k použijeme hodnotu D_k^1, ktorá odpovedá najmenšej vzdialenosti z danej zóny. Aby sme mohli upraviť existujúci výraz pre dolný odhad vzdialeností, musíme zaviesť novú hodnotu $\underline{e}_k$ pre každú zónu $k = 0, \ldots, r$. Dĺžky jednotlivých intervalov e_k nám síce pomôžu pri získaní dolného odhadu, ale nie dobrého. Nová hodnota $\underline{e}_k$ bude pre zónu k predstavovať rozdiel medzi najnižšou možnou vzdialenosťou z danej a predchádzajúcej zóny, ako to ukazuje obrázok č. 1. Potom výraz $e_0x_{j1} + e_1x_{j2} + e_2x_{j3} + e_3x_{j4} + \ldots + e_{r-1}x_{jr}$ nahradíme výrazom $\underline{e}_0x_{j0} + \underline{e}_1x_{j1} + \underline{e}_2x_{j2} + \ldots + \underline{e}_rx_{jr}$.



Obrázok č. 1 Výpočet koeficientov pre aproximáciu vzdialeností

V pokrývacom modeli nie je potrebné uvažovať priraďovacie premenné z_{ij}. V tomto prípade sa budeme snažiť nastaviť hodnoty premenných x_{jk} pre každého zákazníka j tak, aby sme získali dolný, resp. horný odhad pôvodnej účelovej funkcie. Podobne ako v bežných pokrývacích úlohách, aj v tomto prípade zavedieme konštantu a_{ij}^k pre každú usporiadanú trojicu $[<i, j, k] \in I \times J \times \{0, \dots, r\}$. Táto konštanta nadobudne hodnotu 1 práve vtedy, keď vzdialenosť $d_{ij} \le D^k$. Inak položíme $a_{ij}^k = 0$. Potom môžeme formulovať pokrývací model pre horný odhad vzdialeností nasledovne:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} \sum_{k=0}^{r} e_k x_{jk} \tag{7}$$

$$\text{Subject to:} \quad x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij}^k y_i \ge 1 \quad \text{for } j \in J \text{ and } k = 0, \dots, r \tag{8}$$

$$\sum_{i \in I} y_i \le p \tag{9}$$

$$x_{jk} \ge 0 \quad \text{for } j \in J \text{ and } k = 0, \dots, r \tag{10}$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{for } i \in I \tag{11}$$

Účelová funkcia (7) poskytuje horný odhad pôvodnej účelovej funkcie (1). Sústava podmienok (8) hovorí, že premenná x_{jk} môže nadobudnúť hodnotu 0, ak v dosahu D_k od zákazníka j existuje aspoň jedno vybudované stredisko. Inak bude $x_{jk} = 1$. Podmienka (9) limituje počet vybudovaných stredísk. Ostatné podmienky určujú definičný obor premenných. Ak by sme chceli formulovať pokrývaciu úlohu pre dolný odhad vzdialeností, v účelovej funkcii (7) by sme museli nahradiť koeficienty e_k hodnotami $\underline{e}_k$.

4.3 VÝPOČET OPTIMÁLNYCH DELIACICH BODOV

Výpočet optimálnych deliacich bodov hrá kľúčovú úlohu najmä z hľadiska presnosti získaného riešenia. Tu som na základe analýzy viacerých alternatív navrhol exaktný spôsob, ktorý nájde sústavu deliacich bodov s minimálnou celkovou chybou odhadu. Tento prístup je založený na riešení matematického modelu. Výpočet optimálnych deliacich bodov bude rozdielny pre horný a dolný odhad vzdialeností, hoci oba modely spájajú rovnaké predpoklady.

Pri návrhu matematického modelu som vychádzal z princípu, že hodnoty z matice $\{d_{ij}\}$ možno usporiadať do rastúcej postupnosti m+1 hodnôt $d_0 < d_1 < \dots < d_m$, kde $D_0 = d_0$ a $D_m = d_m$. S každou hodnotou d_h je spojená početnosť výskytov N_h tejto hodnoty v matici $\{d_{ij}\}$. Ak existuje práve r rôznych hodnôt medzi d_0 a d_m, potom položíme deliace body $D_1, D_2, \dots, D_r$ rovné týmto hodnotám a riešením pokrývacej úlohy (7) – (11) získame exaktné riešenie pôvodnej úlohy. V opačnom prípade získame len odhad pôvodnej účelovej funkcie, pretože o vzdialenosti medzi zákazníkom a jeho najbližším vybudovaným strediskom vieme iba to, že padne do niektorého z intervalov. Pokiaľ by sme odhadli početnosti n_h hodnôt d_h, kde $h = 0, \dots, m$, v zatiaľ neznámom optimálnom riešení, mohli by sme chybu odhadu minimalizovať riešením modelu (12) – (16) pre horný odhad vzdialeností, resp. (17) – (21) pre dolný odhad. Akým spôsobom určiť hodnoty n_h, ukážem neskôr, najprv popíšem modely na nájdenie optimálnych deliacich bodov. Začnem modelom pre horný odhad vzdialeností.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{m} \sum_{h=1}^{t} (d_t - d_h) n_h z_{ht} \tag{12}$$

$$\text{Subject to:} \quad z_{(h-1)t} \le z_{ht} \quad \text{for } t = 2, \dots, m \text{ and } h = 2, \dots, t \tag{13}$$

$$\sum_{t=h}^{m} z_{ht} = 1 \quad \text{for } h = 1, \dots, m \tag{14}$$

$$\sum_{t=1}^{m-1} z_{tt} = r \tag{15}$$

$$z_{ht} \in \{0,1\} \quad for\, t = 1,...,m \; and \; h = 1,...,t \tag{16}$$

Účelová funkcia (12) minimalizuje celkovú chybu odhadu, pričom berie do úvahy očakávanú početnosť n_h každej hodnoty d_h v optimálnom riešení pôvodnej úlohy. Bivalentné premenné z_{ht} nadobúdajú hodnotu 1 práve vtedy, keď vzdialenosť d_h patrí do intervalu, ktorý končí deliacim bodom d_t. Väzobné podmienky (13) zabezpečujú, že hodnota d_{h-1} môže patriť do intervalu, ktorý končí hodnotou d_t iba vtedy, ak všetky hodnoty medzi d_{h-1} a d_t patria do tohto intervalu. Podmienka (14) hovorí, že každá hodnota musí patriť do práve jedného intervalu. Posledná štrukturálna podmienka (15) zabezpečí práve r deliacich bodov. Po vyriešení modelu indikujú nenulové hodnoty premenných z_{tt} tie vzdialenosti d_t, ktoré odpovedajú deliacim bodom.

V prípade modelu na hľadanie optimálnych deliacich bodov pre dolný odhad vzdialeností je filozofia analogická, aj sa keď význam premenných otáča. Bivalentná premenná $\underline{z}_{th}$ nadobudne hodnotu 1 práve vtedy, keď vzdialenosť d_h patrí do intervalu, ktorý začína deliacim bodom d_t. V predchádzajúcom prípade sa význam premennej vzťahoval na koniec intervalu. Účelová funkcia (17) minimalizuje celkovú chybu odhadu a štrukturálna podmienka (18) sa v tomto prípade viaže na začiatok intervalu. Hovorí, že vzdialenosť d_{h+1} môže patriť do zóny začínajúcej hodnotou d_t len vtedy, ak všetky vzdialenosti medzi d_{h+1} a d_t patria do tejto zóny. Matematický model vyzerá nasledovne:

$$Minimize \quad \sum_{t=0}^{m-1}\sum_{h=t}^{m-1}(d_{h+1} - d_{t+1})n_{h+1}\underline{z}_{th} \tag{17}$$

$$Subject\ to: \quad \underline{z}_{t(h+1)} \le \underline{z}_{th} \quad for\ t = 0,...,m-1\ and\ h = t,...,m-1 \tag{18}$$

$$\sum_{t=0}^{h} \underline{z}_{th} = 1 \quad for\ h = 0,...,m-1 \tag{19}$$

$$\sum_{t=1}^{m-1} \underline{z}_{tt} = r \tag{20}$$

$$\underline{z}_{th} \in \{0,1\} \quad for\ t = 0,...,m-1\ and\ h = t,...,m \tag{21}$$

Pripomínam, že oba modely vo svojich účelových funkciách minimalizujú celkovú chybu odhadu, pričom dĺžky jednotlivých intervalov sú zaťažené očakávanými početnosťami hodnôt d_h, $h = 0, \ldots, m$ v optimálnom riešení. Spomínané početnosti N_h nám požadovaný odhad neposkytnú, pretože odrážajú iba výskyty hodnôt d_h v matici $\{d_{ij}\}$. Nech parameter $p > 2$. Potom možno ukázať, že sa najväčšia vzdialenosť z j-teho stĺpca v optimálnom riešení určite nevyskytne. Je prirodzené, že každého zákazníka j priradíme vždy k najbližšiemu vybudovanému stredisku. To vedie k hypotéze, že početnosť výskytov n_h hodnoty d_h je úmerná hodnote N_h a určitej váhe, ktorá klesá s rastúcou hodnotou vzdialenosti. Túto skutočnosť popíšeme matematicky takto:

$$n_h = N_h e^{\frac{-d_h}{T}} \tag{22}$$

Symbol T reprezentuje kladný parameter - tzv. *teplotu* a N_h je spomínaná frekvencia výskytov hodnoty d_h v matici $\{d_{ij}\}$, pričom v každom stĺpci berieme do úvahy len $|I|$ - p + 1 najmenších hodnôt.

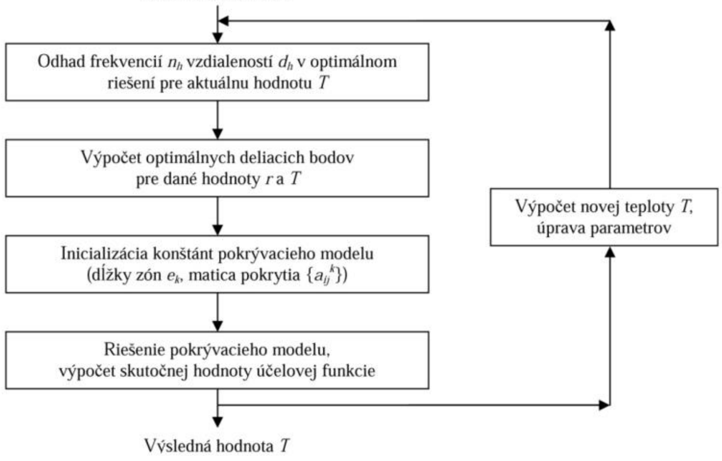
Takto definovaný pokrývací prístup k rozsiahlym úlohám p-mediánu je v dizertačnej práci označovaný ako *statický*, pretože riešenie pôvodnej úlohy p-mediánu je získané na základe stanovených parametrov a nijaké ďalšie informácie sa v procese výpočtu neberú do úvahy. Skôr, ako som začal analyzovať a skúmať takto definovaný pokrývací prístup, porovnal som ho s algoritmom *BBDual* ako aj lokačno-alokačným prístupom na množine benchmarkov dostupných na internete. Keďže sa aproximatívna metóda javila ako perspektívna nielen z hľadiska časovej náročnosti, ale aj z pohľadu kvality nájdeného riešenia, zameral som svoj výskum práve na túto oblasť. Prvou výskumnou otázkou bolo nastavenie parametra T pre konkrétnu úlohu.

4.4 VOĽBA OPTIMÁLNEJ TEPLOTY

Výpočet optimálnych deliacich bodov je postavený na riešení matematického modelu, ktorý vo svojej účelovej funkcii zohľadňuje očakávaný počet výskytov n_h každej relevantnej vzdialenosti d_h. Uvedený odhad n_h vyjadrený predpisom (22) vychádza z hypotézy, že väčšie hodnoty sa v optimálnom riešení vyskytnú len zriedka, zatiaľ čo malé vzdialenosti oveľa častejšie. Je jasné, že takto vyjadrená relevantnosť vzdialeností bude závisieť od hodnoty parametra p, ktorý udáva maximálny počet vybudovaných stredísk. Pre veľký počet stredísk budú prevládať malé vzdialenosti a pre menší počet sa v optimálnom riešení vyskytnú aj väčšie vzdialenosti. Tento predpoklad potvrdili aj predbežné experimenty, ktoré naznačili, že teplota T má zásadný vplyv na presnosť riešenia. Práve preto som skúmal možnosti jej vhodného nastavenia.

Prvou možnosťou bolo stanovenie konečnej množiny možných hodnôt T, z ktorých sa bude vyberať tá najvhodnejšia. Hlavným cieľom výskumu v tejto oblasti bolo nájdenie matematického predpisu, pomocou ktorého by sa mala nastaviť teplota pre konkrétnu úlohu. Na to, aby som mohol formulovať všeobecný predpis však vykonané experimenty nestačia. Nepredstavujú totiž dostatočne veľkú štatistickú vzorku, aby z nej bolo možné vyvodzovať relevantné závery. Na druhej strane ale potvrdzujú očakávaný trend, že s rastúcim pomerom medzi mohutnosťou množiny I a parametrom p rastie aj optimálna hodnota teploty T. Nájdenie konkrétneho vzorca prostriedkami matematickej štatistiky si vyžaduje oveľa väčšie množstvo testovacích úloh v kombinácií s veľkým počtom skúmaných teplôt. Navyše by bola potrebná ďalšia séria experimentov na overenie nájdeného predpisu. Optimálna teplota T nemusí závisieť len od hodnôt $|I|$ a p. Pri jej nastavení môžeme brať do úvahy aj ďalšie parametre Dosiahnuté výsledky však dokazujú vhodnosť a efektívnosť pokrývacieho prístupu.

Proces hľadania optimálnej teploty som sa preto snažil automatizovať. Vďaka tomu, že XPRESS umožňuje blokovanie jednotlivých podmienok, otvára priestor pre implementáciu iteračných metód, kde v rámci jednej iterácie beží niekoľko optimalizačných výpočtov za sebou. Túto výhodnú vlastnosť som využil na implementáciu adaptívneho algoritmu, ktorý je založený na princípe náhodného vyhľadávania. To znamená, že počiatočná hodnota parametra T sa s určitou pravdepodobnosťou zvýši, resp. zníži o stanovený krok v ďalšom iteračnom behu. Pravdepodobnosť zvýšenia teploty je na začiatku nastavená na hodnotu 0,5 a postupne sa aktualizuje v závislosti od dosiahnutého zlepšenia hodnoty účelovej funkcie. Ako ukazuje obrázok č. 2, v každom kroku sa pre aktuálnu hodnotu T vypočítajú deliace body a na základe nich sa vyrieši pokrývacia úloha. Získané riešenie sa porovná s doteraz najlepším nájdeným. Výstupom algoritmu je okrem riešenia úlohy p-mediánu (hodnota účelovej funkcie a premenných y_i pre $i \in I$) aj hodnota parametra T, pre ktorú bolo najlepšie riešenie nájdené. Proces náhodného vyhľadávania končí po dosiahnutí maximálneho počtu iterácií alebo po dosiahnutí maximálneho počtu po sebe idúcich behov bez aktualizácie najlepšieho nájdeného riešenia.



Obrázok č. 2 Schéma adaptívneho algoritmu

Prezentovaný adaptívny algoritmus poskytuje síce dobré hodnoty parametra T, ale na riešenie praktických úloh nie je vhodný z jedného dôvodu. Na nájdenie dobrej teploty je totiž potrebné vykonať rádovo desiatky iterácií, pričom v každej prebiehajú dve optimalizácie. Tento spôsob hľadania hodnoty parametra T je teda časovo veľmi náročný. Napriek tomu je užitočný a preto som sa ním zaoberal ďalej. Mojim cieľom bolo zefektívniť metódu statického zónovania tak, aby som pomocou matematického vzťahu nastavil dobrú teplotu pre ľubovoľnú úlohu.

Uvedený problém som riešil tak, že pre každú úlohu som otestoval niekoľko hodnôt T získaných pomocou adaptívneho algoritmu. Konkrétnu teplotu som považoval za dobrú len vtedy, ak rozdiel medzi pokrývacím
a exaktným riešením úlohy neprekročil 5% z exaktného riešenia. Takýmto spôsobom som získal pre každú veľkosť množiny kandidátov niekoľko teplôt, z ktorých som vychádzal pri odvodzovaní vzťahu medzi veľkosťou úlohy a vhodnou teplotou. Na odvodenie vzťahu som použil prostriedky matematickej štatistiky. Výsledkom bol predpis, ktorý poskytoval vhodnú teplotu pre každú veľkosť množiny I. Jeho nevýhodou je, že pre rozsiahle úlohy poskytuje teploty blízke nule, čo nie je vhodné.

V dizertačnej práci som analyzoval viacero spôsobov nastavenia optimálnej teploty, ktoré viedli k záveru, že nie je možné stanoviť jednoznačný postup, ktorý by zaručil kvalitné výsledky. Navyše, odhad frekvencií jednotlivých vzdialeností v neznámom optimálnom riešení je postavený na hypotéze (22), ktorá v niektorých prípadoch nemusí presne popisovať rozloženie vzdialeností a ich frekvencií v matici. Odhad hodnôt n_h predstavuje samostatnú výskumnú oblasť, ktorej som sa venoval v závere môjho výskumu.

4.5 VOĽBA VHODNÉHO POČTU DELIACICH BODOV

Druhým veľkým problémom statického zónovania je voľba počtu deliacich bodov. Ten musí byť rádovo nižší ako počet kandidátov na umiestnenie strediska $|I|$. Iba obmedzený počet zón dokáže udržať pokrývací model v riešiteľnom rozsahu. Parameter r ovplyvňuje okrem počtu premenných x_{jk}, aj počet štrukturálnych podmienok. Presnosť aproximácie pôvodnej účelovej funkcie je daná veľkosťami intervalov e_k, resp. $\underline{e}_k$, ktoré priamo súvisia s ich počtom. Preto bolo mojou úlohou ukázať vzťah medzi rozsahom modelu, presnosťou riešenia a výpočtovým časom v závislosti od počtu deliacich bodov r.

Pri voľbe vhodnej hodnoty r som vychádzal z hypotézy, že pre malé hodnoty r musia byť jednotlivé zóny široké, aby pokryli všetky vzdialenosti z rozsahu $\langle d_0, d_m \rangle$, čo spôsobí, že pokrývací model bude obsahovať síce málo premenných x_{jk} a podmienok (8), ale presnosť riešenia bude veľmi nízka. Čím budú intervaly dlhšie, tým väčšej chyby sa pri odhade vzdialeností dopustíme. Zároveň predpokladám, že pri malej hodnote r bude čas potrebný na výpočet úlohy kratší, čo je dané rozsahom úlohy. Pri väčšom počte deliacich bodov r očakávam vyššiu presnosť získaného riešenia (pri vyššom počte kratších intervalov celková chyba odhadu jednotlivých vzdelaností klesne) na úkor výpočtového času, ktorý bude v tomto prípade dlhší.

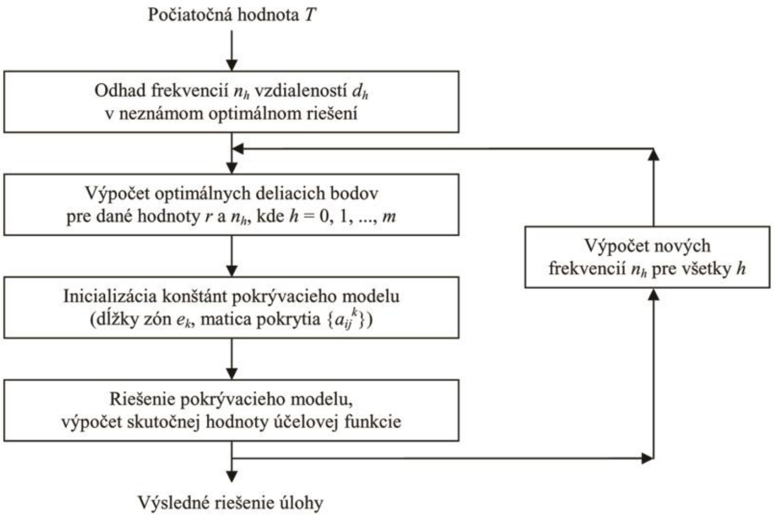
Výsledky numerických experimentov na malých až stredne veľkých úlohách potvrdili, že presnosť aproximatívneho riešenia stúpa so zvyšujúcou sa hodnotou parametra r, avšak za cenu nárastu výpočtového času. Na tomto mieste je potrebné zdôrazniť, že percentuálny rozdiel účelových funkcií exaktného a približného riešenia síce so zvyšujúcou sa hodnotou r klesá, ale od určitého momentu je veľkosť poklesu veľmi malá. Z ekonomického pohľadu by sa dalo povedať, že sa už neoplatí investovať do ďalších jednotiek výpočtového času, pretože celkový prínos kvality riešenia bude veľmi nízky. Na základe uvedených skutočností možno predpokladať, že zvyšovaním počtu deliacich bodov r je možné zlepšiť presnosť získaného riešenia, ale len do určitej hranice. Po jej prekročení už presnosť stúpať nebude (bolo nájdené exaktné riešenie a žiadne lepšie neexistuje) alebo bude stúpať len veľmi pomaly.

Pri voľbe vhodného počtu deliacich bodov r treba brať do úvahy ešte jednu skutočnosť. Relevantné vzdialenosti z matice $\{d_{ij}\}$ usporadúvame do rastúcej postupnosti $d_0, d_1, ..., d_m$, pričom z každého stĺpca vylúčime p-1 najväčších hodnôt. Pri ich rozdeľovaní do zón by sa mohlo zdať logické, že čím väčší je index m, tým vyšší by mal byť počet deliacich bodov r. Netreba však zabúdať, že počet zón ovplyvňuje rozsah pokrývacieho modelu a tým aj nároky na výpočtový čas. Aj z tohto dôvodu som navrhol tzv. *sekvenčný* prístup, ktorý aj pri menšom počte zón dokáže nájsť riešenie s uspokojivou presnosťou v prijateľnom čase.

Na záver kapitoly týkajúcej sa statického zónovania som v dizertačnej práci uviedol niekoľko výsledkov numerických experimentov, ktorých cieľom bolo poukázať na veľkú úsporu času, ktorú možno dosiahnuť vhodnou voľbou parametra r. Ak sa v postupnosti vzdialeností d_0, d_1, ..., d_m nachádza práve r hodnôt medzi d_0 a d_m, potom položíme deliace body D_1, D_2, ..., D_r rovné týmto hodnotám a riešením pokrývacej úlohy (7) – (11) získame exaktné riešenie pôvodnej úlohy. Bez ohľadu na teplotu T stačí nastaviť počet deliacich bodov na $r_{max} = m - 1$. Pre vyšší počet intervalov by úloha nájdenia optimálnych deliacich bodov nebola riešiteľná. Ako ukazujú dosiahnuté výsledky, dôsledkom takéhoto nastavenia počtu deliacich bodov r je veľmi dlhý výpočtový čas pokrývacieho modelu s horným odhadom vzdialeností a $T = 1$ v porovnaní s menším počtom zón pri zachovaní výbornej presnosti. Výpočtový čas pre maximálny počet zón je len o niečo nižší ako v prípade exaktného riešenia úlohy pomocou alokačného modelu, zatiaľ čo pokrývací model s nízkou hodnotou r poskytuje kvalitné riešenie oveľa rýchlejšie.

4.6 SEKVENČNÝ PRÍSTUP

Doteraz som sa zaoberal možnosťami statického zónovania, kde sa počty výskytov n_h vzdialeností d_h v optimálnom riešení odhadovali pomocou teploty T podľa vzťahu (22). Hodnoty n_h pre $h = 0, ..., m$ ovplyvňujú výber deliacich bodov D_1, D_2, ..., D_r a tým aj presnosť riešenia. Princíp *sekvenčného zónovania* spočíva v snahe priblížiť odhadovanú relevantnosť n_h vzdialeností d_h čo najbližšie k realite iteratívnou úpravou koeficientov n_h. Spomínaná relevantnosť označuje silu nášho presvedčenia, že hodnota d_h bude súčasťou neznámeho optimálneho riešenia úlohy, pričom hodnoty n_h v každom kroku upresňujeme. Princíp je teda veľmi jednoduchý. Schematicky je znázornený na obrázku č. 3.



Obrázok č. 3 Princíp metódy sekvenčného zónovania

Keďže teraz viem, v ktorých miestach majú byť vybudované obslužné strediská, pre ktoréhokoľvek zákazníka $j \in J$ dokážem nájsť vzdialenosť k najbližšiemu vybudovanému stredisku. To zanemená, že na základe hodnôt z matice vzdialeností dokážem určiť, ktorá vzdialenosť sa vyskytla v optimálnom riešení a koľkokrát. Inými slovami, analýzou získaného riešenia môžem aktualizovať hodnoty n_h, ktoré som na začiatku len odhadoval. Takto spresním početnosti výskytov jednotlivých hodnôt v optimálnom riešení a hľadám nové deliace body. Pomocou nich znova riešim pokrývaciu úlohu a tieto kroky opakujem dovtedy, kým nesplním niektoré z kritérií zastavenia. Medzi štandardné kritéria patria: maximálny počet iterácií a maximálny počet krokov bez aktualizácie najlepšieho nájdeného riešenia.

Uvedená metóda vykazovala veľmi presné výsledky v porovnaní s inými metódami. Jej plná sila sa ukázala najmä pri využití dolného odhadu vzdialeností, pretože okrem kvalitného riešenia dokáže poskytnúť aj dolnú hranicu. Vďaka tomu získame uzavretý interval, v ktorom sa nachádza hodnota účelovej funkcie exaktného riešenia. Takýmto spôsobom viem vyhodnotiť presnosť riešenia veľmi rozsiahlych úloh. Na druhej strane, práve aproximácia vzdialenosti zdola spôsobila veľké problémy z hľadiska výpočtového času. V prípade rozsiahlych úloh, kde bolo nájdené optimálne riešenie pôvodnej úlohy, trval výpočet extrémne dlho. Dôkladnou analýzou výpočtového procesu som dospel k súboju medzi malým úbytkom presnosti riešenia a možným skrátením výpočtového času. Jednou z možností bolo zníženie počtu zón, čo sa ukázalo síce ako priechodné riešenie, ale v ďalšej fáze som dospel k záveru, že stačí pridať dodatočnú podmienku pre zastavenie výpočtového procesu. Ak bolo nájdené riešenie, ktorého dolná hranica je rovnaká ako hodnota jeho účelovej funkcie, potom je toto riešenie optimálne a žiadne lepšie neexistuje. Ďalšie iterácie sú preto zbytočné.

Uvedené pravidlo som zovšeobecnil, čím som získal ľahko implementovateľnú aproximatívnu metódu s kontrolovateľnou stratou presnosti. V takomto prípade som výpočet zastavil vtedy, keď bolo nájdené uspokojivé riešenie (rozdiel dolnej hranice a hodnoty najlepšieho riešenia, t.j. hornej hranice klesol pod stanovenú hranicu, napríklad 2 percentá z hornej hranice).

Okrem základného sekvenčného prístupu som v dizertačnej skúmal možnosti využitia horného i dolného odhadu vzdialeností na spoločných deliacich bodoch, pričom v ďalších fázach som hľadal možnosti zefektívnenia navrhnutých metód. Jednotlivé metódy som vzájomne porovnal nielen z hľadiska časovej náročnosti, ale aj z pohľadu kvality nájdeného riešenia.

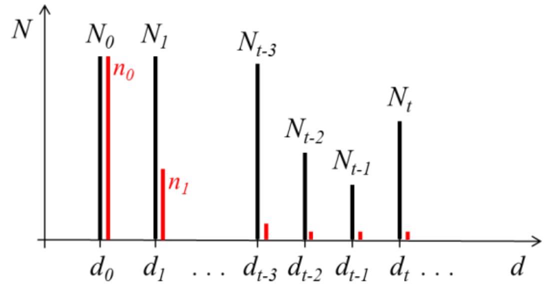
Ďalší výskum v oblasti optimalizácie sekvenčného prístupu by mohol byť zameraný na počiatočnú fázu, kde sa otvára priestor na zefektívnenie metódy vhodným nastavením hodnôt r a T. Okrem toho by bolo dobré preskúmať možnosti redukcie postupnosti relevantných vzdialeností d_h pri výbere kandidátov na počiatočné deliace body.

4.7 RELEVANTNOSŤ VZDIALENOSTÍ

V tejto podkapitole sa budem zaoberať témou relevantnosti jednotlivých vzdialeností, pričom predostriem niekoľko spôsobov jej matematického vyjadrenia.

Základným predpokladom, z ktorého som pri návrhu rôznych pohľadov na relevantnosť vychádzal, bola skutočnosť, že pokiaľ sa v postupnosti $d_0, d_1, ..., d_m$ nachádza viac ako r hodnôt, tak riešením pokrývacieho modelu (7) – (11) získame len odhad pôvodnej účelovej funkcie. Celkovú chybu odhadu, ktorej sa dopustíme, možno znížiť vhodným usporiadaním jednotlivých zón. Hľadanie optimálnych deliacich bodov $D_1, D_2, ..., D_r$ je postavené na základnej myšlienke, že niektoré vzdialenosti d_h očakávame v optimálnom riešení viac, iné menej a niektoré sa tam nevyskytnú vôbec. Ako som ukázal, pri tvorbe postupnosti $d_0, ..., d_m$ z matice $\{d_{ij}\}$ môžeme z každého stĺpca vylúčiť p - 1 najväčších hodnôt. Uvedená redukcia je dôkazom toho, že niektoré hodnoty d_{ij} sú *nerelevantné*, čo znamená, že určite nepredstavujú vzdialenosť zákazníka od jeho najbližšieho vybudovaného strediska. *Relevantnosť* vzdialenosti d_h vyjadruje silu nášho presvedčenia, že hodnota d_h bude súčasťou optimálneho riešenia. Uvedenú skutočnosť vyjadríme pomocou konštanty n_h pre $h = 0, 1, ..., m$, ktorá predstavuje odhad počtu výskytov vzdialenosti d_h v neznámom optimálnom riešení. Koeficienty n_h zohrávajú kľúčovú úlohu pri výpočte optimálnych deliacich bodov $D_1, D_2, ..., D_r$. Sú totiž súčasťou účelovej funkcie modelov (12) – (16) a (17) – (21). Ak vzdialenosť d_h aproximujeme zhora hodnotou d_t, potom rozdiel $(d_t – d_h)$ ovplyvní chybu odhadu vzdialeností práve n_h – krát.

Prvým spôsobom vyčíslenia relevantnosti vzdialenosti d_h pomocou koeficientu n_h je *exponenciálny prístup*, ktorý som používal vo všetkých doterajších experimentoch. Jeho hlavná myšlienka spočíva v tom, že relevantnosť hodnoty d_h závisí od počtu jej výskytov N_h v matici $\{d_{ij}\}$ redukovanej o p – 1 najväčších hodnôt z každého stĺpca, ale aj od určitej váhy, ktorá klesá s rastúcou hodnotou d_h, pričom rýchlosť poklesu je daná parametrom T. Matematické vyjadrenie možno zapísať v tvare (22).



Obrázok č. 4 Exponenciálny prístup k relevantnosti

Takáto definícia relevantnosti však nemusí vyhovovať všetkým riešeným úlohám. V niektorých prípadoch bolo náročné určiť vhodnú teplotu, ktorá by najlepšie vystihovala danú situáciu. Preto som sa zamýšľal nad tým, či by mala byť relevantnosť vzdialenosti d_h úmerná len jej absolútnej hodnote $|d_h|$ a frekvencii N_h, resp. akým iným spôsobom by sa dala vyjadriť a od čoho všetkého by mohla a mala závisieť.

Druhým prístupom k relevantnosti je tzv. *ranking*, ktorý je postavený na princípe, že význam hodnoty d_{ij} v stĺpci j závisí od jej pozície v usporiadanej postupnosti vzdialeností z daného stĺpca. Príkladom je taká situácia, kedy za relevantné považujeme len najmenšie vzdialenosti z jednotlivých stĺpcov $j \in J$. Vo všeobecnosti bude maximálna relevantnosť vyjadrená konštantou α, ktorá môže byť rovná napríklad počtu riadkov matice, resp. počtu možných umiestnení strediska. Okrem toho je potrebná konštanta s (*step*), ktorá predstavuje veľkosť úbytku relevantnosti nasledujúcej vzdialenosti z danej usporiadanej postupnosti. Ak bude mať najmenšia hodnota v stĺpci relevantnosť α, druhá najmenšia bude mať relevantnosť $(\alpha - s)$, tretia $(\alpha - 2s)$ a takto to môže lineárne pokračovať ďalej. Týmto spôsobom môžeme priradiť určité váhy všetkým vzdialenostiam od najmenšej až po hodnotu na pozícii $\alpha + 1 - t$, pričom t je parameter označovaný ako *threshold*. Znamená, že $t - 1$ najväčších vzdialeností v danom stĺpci považujeme za nerelevantné. Hodnota parametra t musí byť celočíselná z intervalu $\langle p, \alpha - 1\rangle$ a veľkosť kroku s sa môže pohybovať v rozsahu $\langle 0, \alpha / (\alpha - t)\rangle$. Ak chceme uvedený prístup formalizovať, musíme definovať mapovanie $P_j(d_{ij})$ hodnôt z j-teho stĺpca do oboru prirodzených čísel. Mapovacia funkcia $P_j(d_{ij})$ vráti poradie vzdialenosti d_{ij} v usporiadanej rastúcej postupnosti hodnôt stĺpca j, kde minimálnej vzdialenosti odpovedá hodnota 1. Potom pre každú vzdialenosť d_{ij} v j-tom stĺpci zavedieme tzv. *ranking funkciu* $L_j^{ts}(d_{ij})$ definovanú predpisom (23). Z uvedeného vzťahu vyplýva, že čím nižšia je daná vzdialenosť d_{ij}, tým bude relevantnejšia.

$$L_j^{ts}(d_{ij}) = \begin{cases} \alpha + s * \left(1 - P_j(d_{ij})\right) & \text{pre} P_j(d_{ij}) < \alpha + 1 - t \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{23}$$

Keďže vo všeobecnosti platí, že hodnota d_h sa môže vyskytovať vo viacerých stĺpcoch, potom zavedieme takú funkciu L^{tsh}, ktorá to zohľadní. Jej predpis je definovaný vzťahom (24), kde t a s sú rovnaké parametre ako v prípade stĺpcovej ranking funkcie $L_j^{ts}(d_{ij})$. Konštanta t predstavuje *threshold* a hodnota s udáva veľkosť úbytku relevantnosti medzi susednými vzdialenosťami v usporiadanom stĺpci matice.

$$L^{tsh}(d_h) = \sum_{j \in J} \sum_{\substack{i \in I \\ d_h = d_{ij}}} L_j^{ts}(d_{ij}) \tag{24}$$

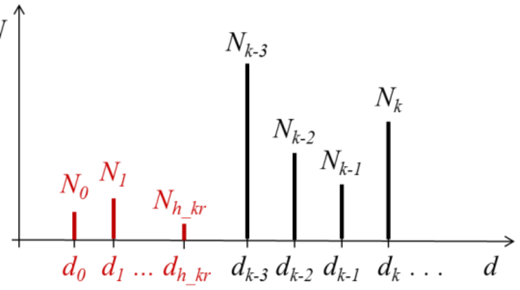
Keď je známy spôsob vyhodnotenia relevantnosti ľubovoľnej vzdialenosti d_h, potom je potrebné určiť vhodné hodnoty parametrov α, s a t. Na základe nich môžeme nastaviť konštanty n_h takto:

$$n_h = L^{tsh}(d_h) \quad \forall\, h = 0, 1, \ldots, m \tag{25}$$

Alternatívou k predpisu (25) je kombinácia exponenciálneho a *ranking* prístupu, čo v praxi znamená, že jednotlivé hodnoty $L^{tsh}(d_h)$ sú znížené exponenciálne v závislosti od absolútnej hodnoty $|d_h|$. Matematické vyjadrenie takto upravenej relevantnosti má tvar (26).

$$n_h = L^{tsh}(d_h) e^{\frac{-d_h}{T}} \quad \forall\, h = 0, 1, \ldots, m \tag{26}$$

Jednotlivé prístupy k relevantnosti vzdialeností som porovnal na niekoľkých úlohách, pričom dosiahnuté výsledky boli z istého pohľadu zvláštne. Klasický (exponenciálny) aj *ranking* prístup k odhadu relevantností n_h jednotlivých vzdialeností vykazujú v niektorých prípadoch určitú mieru nepresnosti. Mojou snahou bolo nájsť zdroj týchto nedostatkov a následne navrhnúť lepší odhad relevantností n_h. Prvým krokom bola dôsledná analýza špecifických inštancií, ktorá poukázala na skutočnosť, že pri odhade hodnôt n_h by sme mali prihliadať na rozloženie vzdialeností v matici $\{d_{ij}\}$. Niektoré úlohy boli špecifické v tom, že usporiadaná postupnosť hodnôt d_0, d_1, ..., d_m obsahovala niekoľko malých vzdialeností d_0, d_1, ..., d_{h_kr}, ktoré sa v matici vyskytovali zriedka, zatiaľ čo vzdialenosti s vyššími frekvenciami N_h boli väčšie. Táto skutočnosť je znázornená na obrázku č. 5.



Obrázok č. 5 Rozloženie vzdialeností a ich frekvencií

Uvedené špecifiká analyzovaných úloh viedli k ďalšiemu pohľadu na relevantnosť vzdialeností, ktorý vychádza zo vzťahu (22) s tým rozdielom, že exponenciálna redukcia frekvencií pri odhade konštánt n_h začne až za „kritickým“ indexom h_kr. Inými slovami, malým hodnotám ponechám odhadované frekvencie n_h na úrovni pôvodných N_h a väčším vzdialenostiam ich budem exponenciálne znižovať. Aby som uvedené skutočnosti mohol zapísať matematicky, zavediem pre každý index h funkciu $g(h)$. Definujem ju podľa predpisu (27), kde T predstavuje teplotu používanú doteraz vo výraze (22). Jej hodnota ovplyvňuje strmosť exponenciály.

$$g(h) = \begin{cases} 1 & \forall\, h = 0, 1, \dots, h\_kr \\ e^{-\frac{h - h\_kr}{T}} & \forall\, h = h\_kr + 1, \dots, m \end{cases} \tag{27}$$

Relevantnosť n_h jednotlivých vzdialeností d_h možno potom definovať nasledovne:

$$n_h = N_h\, g(h) \quad \forall\, h = 0, 1, \dots, m \tag{28}$$

Poslednou nevyriešenou otázkou zostáva určiť hraničný index h_kr, prípadne teplotu T. Na nájdenie vhodnej hodnoty indexu h_kr použijeme predpis (29), kde q je parametrom navrhnutého prístupu.

$$h\_kr = min\left\{ h \in Z^+ : \sum_{u=0}^{h} N_u \geq \frac{S_m}{p} q \right\} \tag{29}$$

Všetky popísané prístupy k relevantnosti boli testované s rôznymi parametrami na malých a stredne veľkých úlohách, pričom hlavným kritériom kvality bola presnosť získaného riešenia. Dosiahnuté výsledky poukazujú na výhodnosť odhadu relevantnosti jednotlivých vzdialeností vyššie popísaným spôsobom, ktorý umožňuje získať veľmi presné výsledky v krátkom čase. Uvedenej problematike by sa mohol venovať ďalší výskum s cieľom nájsť matematické vzťahy, podľa ktorých by sa mali nastavovať parametre navrhnutej metódy (teplota T, hodnota parametra q) v závislosti od charakteristík konkrétnej úlohy. Vhodnou voľbou teploty a iných konštánt je možné dosiahnuť riešenie, ktoré je veľmi blízko optima.

Na záver možno zhrnúť, že odhadovaná relevantnosť vzdialeností zohráva veľmi dôležitú úlohu pri riešení úlohy p-mediánu aproximatívnou pokrývacou metódou, pretože ovplyvňuje výber deliacich bodov, od ktorých závisí presnosť získaného riešenia. Spomínaná relevantnosť môže mať niekoľko podôb, ktoré sa môžu navzájom výrazne líšiť. Keďže je táto problematika dôležitou súčasťou pokrývacieho prístupu, bude jej venovaný ďalší výskum zameraný na vplyv rôznych vyjadrení relevantnosti na kvalitu dolnej hranice s možným rozšírením o sekvenčný prístup.

4.8 ÚLOHY VÁŽENÉHO P-MEDIÁNU

Jednotlivé metódy navrhnuté v dizertačnej práci a overené na množine malých a stredne veľkých úloh p-mediánu možno zovšeobecniť a s drobnými úpravami aplikovať na úlohy váženého p-mediánu. Jediný rozdiel oproti klasickej lokačno-alokačnej formulácii pôvodnej úlohy je ten, že v účelovej funkcii sa jednotlivé vzdialenosti d_{ij} a priradenia zákazníkov $j \in J$ k vybudovaným strediskám z množiny I vážia požiadavkami zákazníkov b_j. Tieto požiadavky môžu mať rôznu interpretáciu. Ak za zákazníkov považujeme jednotlivé obce ležiace na území SR, potom ich môžeme označiť za *agregovaných* zákazníkov, ktorí v sebe zahŕňajú niekoľko elementárnych zákazníkov (obyvateľov). Požiadavky b_j môžu v tomto prípade predstavovať počet obyvateľov konkrétnej obce s indexom j, ktorí majú rovnaký prístup k službe strediska, napríklad k neodkladnej zdravotnej starostlivosti.

Z pohľadu matematického modelovania môžeme úlohu váženého p-mediánu formulovať pomocou lokačno-alokačného modelu (1) – (6) s tým rozdielom, že účelovú funkciu (1) vyjadrujúcu súčet vzdialeností medzi zákazníkmi a ich obsluhujúcimi strediskami nahradíme účelovou funkciou (30).

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_j d_{ij} z_{ij} \tag{30}$$

Účelovú funkciu (30) možno zapísať v tvare (31), z ktorého budem vychádzať pri reformulácii modelu na pokrývací podobne ako v prípade klasickej úlohy p-mediánu.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} b_j \sum_{i \in I} d_{ij} z_{ij} \tag{31}$$

Vzhľadom k tomu, že v štrukturálnych podmienkach pôvodného modelu sa vyžaduje priradenie každého zákazníka $j \in J$ práve jednému vybudovanému obslužnému stredisku, môžeme príslušnú vzdialenosť aproximovať zhora i zdola pomocou koeficientov e_k, resp. $\underline{e}_k$ a bivalentných premenných x_{jk} pre zákazníkov $j \in J$ a zóny $k \in \{0, 1, ..., r\}$ ako to udáva vzťah (32).

$$\sum_{i \in I} d_{ij} z_{ij} = \sum_{k=0}^{r} e_k x_{jk} \quad \forall\ j \in J \tag{32}$$

V súlade s predchádzajúcimi pravidlami môžeme úlohu váženého p-mediánu formulovať pomocou pokrývacieho modelu, pričom pre horný odhad vzdialeností použijeme účelovú funkciu (33) a štrukturálne podmienky (8) – (11). V prípade dolnej aproximácie vzdialeností nahradíme koeficienty e_k konštantami $\underline{e}_k$.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} b_j \sum_{k=0}^{r} e_k x_{jk} \tag{33}$$

Na overenie navrhnutých postupov som vykonal niekoľko experimentov na malých a stredne veľkých úlohách z cestnej siete Slovenska. Požiadavky zákazníkov predstavovali počet obyvateľov, pričom každá obec bola zároveň zákazníkom i kandidátom na umiestnenie strediska. Jednotlivé obce som vyberal tak, že všetky obce ležiace na území SR som zoradil podľa počtu obyvateľov od najvyššieho po najnižší a prvých $|I|$ obcí som vzal do úvahy. Výsledky experimentov potvrdzujú aplikovateľnosť navrhnutých metód aj na úlohy váženého p-mediánu s dobrou kvalitou výsledkov. Hoci statický pokrývací prístup vykazuje vyššie odchýlky od optimálneho riešenia, pomocou sekvenčnej metódy získame veľmi uspokojivé výsledky v prijateľnom čase, navyše s dolnou hranicou neznámeho optima.

V súvislosti s riešením úloh váženého p-mediánu navrhnutými pokrývacími metódami sa vynára niekoľko vedeckých otázok, ktoré si vyžadujú ďalší aplikovaný výskum. Jedná sa hlavne o výpočet optimálnych deliacich bodov D_1, D_2, ..., D_r. V klasickej úlohe p-mediánu zohráva kľúčovú úlohu odhad relevantnosti jednotlivých vzdialeností vyjadrený hodnotami koeficientov n_h pre $h = 0, 1, ..., m$. Hodnota m+1 udáva počet relevantných vzdialeností z matice $\{d_{ij}\}$. V prípade váženého p-mediánu by bolo dobré preskúmať možnosti využitia požiadaviek jednotlivých zákazníkov b_j, ktoré tiež ovplyvňujú dôležitosť vzdialeností. V tomto prípade sa očakáva, že vzdialenosť medzi zákazníkom j s vysokou požiadavkou b_j a jeho obsluhujúcim strediskom by mala byť odhadnutá čo najpresnejšie. Otázkou teda je, či by požiadavky b_j nemali byť súčasťou výpočtu optimálnych deliacich bodov. Tu som navrhol niekoľko stratégií, ako by mohli byť požiadavky zakomponované do odhadu frekvencií n_h jednotlivých vzdialeností d_h, pričom uvedené návrhy treba v ďalšom výskume implementovať, vyšetriť ich vlastnosti, predovšetkým vplyv na kvalitu riešenia, prípadne vhodným spôsobom modifikovať.

5. ZÁVER

Vo svojej práci som sa zaoberal aplikovaným výskumom v oblasti navrhovania štruktúry rozsiahlych verejných obslužných systémov metódami pokrývania s využitím prostriedkov aplikovanej informatiky. Svoj výskum som orientoval na rozsiahle úlohy *p*-mediánu s veľkým množstvom praktických aplikácií.

Pokrývacie úlohy patria podľa výsledkov rôznych experimentov medzi úlohy, ktoré sú riešiteľné univerzálnymi softvérovými nástrojmi pomerne rýchlo aj pri veľkom rozsahu, a to i napriek tomu, že patria do skupiny NP-ťažkých úloh. Uvedenú vlastnosť som využil na efektívne riešenie rozsiahlych úloh *p*-mediánu. Cieľom transformácie úlohy na pokrývaciu bolo zabezpečiť nielen riešiteľnosť problému pomocou dostupných softvérových nástrojov, ale tiež skrátenie doby výpočtu v porovnaní s inými metódami. Tie majú mnohé obmedzenia (najmä kapacitné), ktoré znemožňujú ich použitie pri riešení úloh praktických rozmerov. Navrhnutý pokrývací prístup sa preto javí ako efektívna alternatíva schopná poskytnúť kvalitné riešenie v prijateľnom čase.

Štvrtá kapitola dizertačnej práce sa venuje problematike návrhu štruktúry verejných obslužných systémov z praktického hľadiska. Najskôr som ukázal princíp hornej a dolnej aproximácie vzdialeností pomocou vytvárania zón oddelených rastúcou postupnosťou deliacich bodov, následne som skúmal možnosti výpočtu optimálnych deliacich bodov tak, aby bola celková chyba odhadu minimálna. Tu som navrhol matematický model založený na odhade relevantností jednotlivých vzdialeností. Tieto hodnoty predstavujú očakávaný počet výskytov daných vzdialeností v neznámom optimálnom riešení. Na základe výpočtu optimálnych deliacich bodov možno pôvodný lokačno-alokačný model úlohy *p*-mediánu preformulovať na pokrývací, čím získame implementačne aj výpočtovo nenáročnú úlohu. Jednou z čiastkových výskumných úloh bolo nastavenie parametrov, ktoré majú zásadný vplyv na presnosť riešenia i výpočtový čas. Okrem *teploty* slúžiacej na odhad relevantností jednotlivých vzdialeností som skúmal aj vplyv počtu deliacich bodov na kvalitu riešenia a výpočtový čas, ktorý súvisí s rozsahom riešenej úlohy. Základný princíp navrhnutej pokrývacej metódy som overil v optimalizačnom prostredí XPRESS na množine malých a stredne veľkých benchmarkov dostupných na internete. Dosiahnuté výsledky som porovnal s vybranými metódami uvádzanými v literatúre s cieľom ukázať, že aproximatívny pokrývací prístup je nielen časovo výhodný, ale že poskytuje veľmi uspokojivé výsledky z hľadiska presnosti, vďaka čomu ho možno považovať za veľmi prínosný.

Vďaka jednoduchému blokovaniu podmienok v prostredí XPRESS sa otvorili možnosti implementácie modelov s viacerými príkazmi optimalizácie v jednom súbore. Uvedenú vlastnosť som využil na návrh metódy sekvenčného zónovania, ktorá vychádza z princípu, že získané pokrývacie riešenie môže slúžiť na spresnenie odhadu relevantností jednotlivých vzdialeností a reorganizáciu zón tak, aby bolo nájdené lepšie riešenie.

V ďalšej fáze výskumu som sa zaoberal problematikou matematického vyjadrenia relevantností vzdialeností, pričom na niekoľkých úlohách som overil niekoľko hypotéz, ktoré naznačujú smer ďalšieho výskumu.

Jednotlivé postupy boli aplikované aj na rozsiahle úlohy váženého *p*-mediánu s dobrými výsledkami. Práve vážené *p*-mediány predstavujú výzvu pre ďalší výskum zameraný na hľadanie optimálnych deliacich bodov s dôrazom na požiadavky jednotlivých zákazníkov.

Za hlavný prínos dizertačnej práce možno považovať nielen samotné modely, ktoré sú implementačne nenáročné, ale aj možnosť využitia prostriedkov aplikovanej informatiky. Najväčšia výhoda navrhnutých postupov spočíva v tom, že na získanie kvalitného riešenia úloh *p*-mediánu nie je nutný žiadny špecializovaný algoritmus, dokonca ani vysoká programátorská zručnosť, či znalosti z oblasti informatiky. Princíp spočíva vo využití dvoch modelov, ktoré sú ľahko implementovateľné v bežne dostupnom solveri, akým je napríklad XPRESS. Využitím výhodných vlastností pokrývacích úloh a radiálneho prístupu uvádzaného v dostupnej literatúre som nadviazal na najnovšie výsledky v tejto oblasti, pričom svojim prístupom sa výrazne odlišujem od iných autorov. Na základe mnohých experimentov na stredne veľkých úlohách som ukázal, že využitie pokrývacích modelov významným spôsobom rozširuje možnosti riešenia praktických úloh, kde exaktné algoritmy integrované do univerzálnych nástrojov na podporu rozhodovania z časových alebo kapacitných dôvodov často zlyhávajú. Výsledky môjho výskumu tak priniesli nové možnosti pre návrh verejných obslužných systémov, čím som splnil všetky stanovené ciele.

SUMMARY

DESIGNING OF LARGE-SCALE PUBLIC SERVICE SYSTEMS BY COVERING METHODS

Designing a public service system, including medical emergency system, fire-brigade deployment, public administration system and many others, can often bring along some overall combinatorial problems concerning the system structure. The public service system structure is formed by the deployment of the limited number of service centers, and the associated objective is to minimize social costs, which are proportional to the distances from serviced objects to the nearest source of the provided service. The mathematical models of the public service system design problem are often related to the *p*-median problem, which is formulated as the task of the determination of most *p* network nodes as facility locations, so that the sum of the distances between each node and the nearest located facility is minimal. With real problems, the number of serviced customers takes the value of several thousands, and the number of possible facility locations can take this value as well. The number of possible service center locations seriously impacts the computational time. To obtain a good decision on a facility location in any serviced area, the mathematical model of the problem can be formulated, and some of mathematical programming methods can be applied to find an optimal solution. The location-allocation model constitutes a mathematical programming problem which resists any attempt at a fast solution.

Another way of the *p*-median problem representation by means of mathematical programming uses so called radius formulation. This approach avoids assigning individual customers to some of the located facilities, and it deals only with the information whether some facility is or is not located in a given radius from the customer. The later approach leads to the model similar to the set covering problem, which is easy to solve even for large instances by common optimization software tools. This approach pays for shorter computational time or smaller computer memory demand by losing its accuracy. The accuracy can be improved by some convenient determination of so called dividing points which are used in the problem reformulation. The dividing points can be determined so that the expected deviation is minimized and the deviation is expressed using so called distance value relevance.

The distance value relevance expresses the strength of expectation that the distance belongs to the optimal solution of the *p*-median problem. There are several ways to express the distance value relevance. In previous works we based our research on the idea that the distance value relevance dropped exponentially with the distance value. In this thesis we base our approach to the relevance estimation on so called column ranking, where not only value but also the order of the distance is taken into account. We suggest the formulation of the ranking relevance and study the influence of the associated dividing point deployment on the effectiveness of the approximate approach.

As a complementary algorithm used for making the covering method more accurate we suggest a sequential approach to the dividing points determination, and we use them not only to obtain a good solution of the problem but also to gain lower bound of the unknown optimal solution. We demonstrate the impact of the sequential approach to the accuracy and computational time. We have performed the numerical comparison of the suggested approximate method to the location-allocation approach. To solve the associated problems, we use the common optimization environment XPRESS.

Keywords: Public service system, large *p*-median problem, covering formulation, approximate approach, sequential method, lower and upper bound, XPRESS

ZOZNAM PRÁC AUTORA Z OBLASTI SKÚMANEJ PROBLEMATIKY

1. JANÁČEK, J., KVET, M. (2011). *Sequential zone adjustment for approximate solving of large p-median problems.* In Operations Research Proceedings 2011: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR 2011), August 30-September 2, 2011, Zürich, Switzerland, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, ISBN 978-3-642-29209-5, pp. 269-274
2. JANÁČEK, J., KVET, M. (2011). *Approximate solving of large p-median problems.* In Operational research peripatetic post-graduate programme: Cádiz, Spain. Sept. 13-17, 2011, Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2011, ISBN 978-84-9828-348-8, pp. 221-225
3. JANÁČEK, J., KVET, M. (2012). *Dynamic zone adjustment for approximate approach to the p-Median problem.* In ORP3 = Operational research peripatetic post-graduate program 2012, July 16-20 2012, Linz, Austria, pp. 555-562
4. JANÁČEK, J., KVET, M. (2012). *Relevant network distances for approximate approach to the p-median problem.* In Operations Research Proceedings 2012: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR 2012), September 4-7 2012, Leibniz Univesität Hannover, Germany, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012, v tlači,
5. KVET, M. (2010). *Umiestňovanie zdrojov na riešenie krízových javov*. In Zborník príspevkov 7. medzinárodnej konferencie mladých vedeckých pracovníkov Mladá veda 2010, 9.-10.11.2010, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta špeciálneho inžinierstva, 2010, ISBN 978-80-554-0272-7

   Citované:
   JANÁČEK, J. (2010). *Informatické nástroje pro podporu rozhodování v krizových situacích*. In Zborník príspevkov 7. medzinárodnej konferencie mladých vedeckých pracovníkov Mladá veda 2010: 9.-10.11.2010 [CD-ROM], Žilina: Žilinská univerzita, Fakulta špeciálneho inžinierstva, 2010, ISBN 978-80-554-0272-7

6. KVET, M. (2011). *Applications of the set covering problem.* In Zimná škola MICT: mathematics for information and communication technologies: 6th winter school of mathematics for ICT: Šachtičky 3.-8.1.2011, Banská Bystrica: Science and Research Institute, MBU, 2011, ISBN 978-80-557-0252-0, pp. 67-70
7. KVET, M. (2011). *Aproximácia matice vzdialenosti pre približné riešenie rozsiahlych úloh p-mediánu.* In Sborník příspěvků konference INFOTRANS 2011: 28.4. 2011, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011, ISBN 978-80-7395-397-3, str. 123-128
8. KVET, M. (2011). *Približné riešenie rozsiahlych úloh mediánového typu.* In Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2011: současný stav a perspektivy: sborník příspěvků: Pardubice 29. duben 2011, Pardubice: Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, 2011, ISBN 978-80-7395-439-0, str. 18-33
9. KVET, M. (2011). *Static Zone Adjustment for Approximate Solving of the p-Median Problem*. In TRANSCOM 2011: 9-th European conference of young research and scientific workers: Žilina, 27.-29.6.2011, Žilina: University of Žilina, ISBN 978-80-554-0369-4, pp. 129-132
10. KVET, M. (2011). *Adaptive algorithm of parameter adjustment for approximate solving of the p-median problem.* In Mathematical methods in economics 2011: proceedings of the 29th international conference: September 6-9.2011, Janská Dolina, Slovakia, Praha: Professional Publishing, ISBN 978-80-7431-059-1, pp. 437-442
11. KVET, M. (2012). *Využitie IP-solvera na približné riešenie rozsiahlych úloh p-mediánu*. In Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2012: Využití telematiky v dopravních a logistických systémech, využití IP solveru při řešení úloh diskrétni lokace, Pardubice: Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice, 18.5.2012, ISBN 978-80-7395-554-0, pp. 56-70
12. KVET, M. (2012). *Public service system design with advanced covering approach*. In Technika, technologie, telematika a informatika v dopravních a logistických systémech: sborník, Pardubice: Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice, 15.11.2012, v tlači

13. KVET, M., JANÁČEK, J. (2012). *Trade-off the accuracy for computational time in approximate solving technique for the p-median problem.* In Quantitative methods in economics 2012: multiple criteria decision making XVI: proceedings of the international scientific conference: 30th May - 1st June 2012, Bratislava, Slovakia, Ekonóm, 2012, ISBN 978-80-225-3426-0, pp. 136-140
14. KVET, M., JANÁČEK, J. (2012). *Generalization of zoning method for approximate approach to large p-median problems*. In Methods and Applications of Artificial Intelligence – Proceedings of the International Workshop, 21.-22. September 2012, Bielsko-Biala: Institute of Management and Information Technology, Poland, ISBN 978-83-62466-19-1, pp. 5-10

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] AVELLA, P. et al. (2012). *An aggregation heuristic for large scale p-median problem*. In Computers & Operations Research 39, 2012, pp. 1625-1632

[2] AVELLA, P., SASSANO, A., VASSIL´EV, I. (2007). *Computational study of large scale p-median problems*. In Mathematical Programming 109, 2007, pp. 89-114

[3] BALINSKI, M. (1965). *Integer programming: methods, uses computation*. In Management Science, 12, 1965, pp. 254–313

[4] BEASLEY, J. E. (1993). *Lagrangean heuristics for location problems*. In European Journal of Operational Research 65(3), 1993, pp. 383-399

[5] BEASLEY, J. E. (1993). *Lagrangean relaxation*. In Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, Oxford Blackwell Scientific Publications, London, 1993, ISBN 0-632-03238-3, pp. 243-303

[6] BEASLEY J. E. (1990), *OR Library*: *Distributing Test Problems by Electronic Mail.* Journal of the Operational Research Society, 41(11), pp. 1069-1072

[7] BUZNA, Ľ. (2010). *Informatické nástroje pre návrh obslužných systémov na priestorovo rozľahlých sieťach*: habilitačná práca, Žilina: Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky, 2010, 91 s.

[8] CAPRARA, A., TOTH, P., FISCHETTI, M. (2000). *Algorithms for the Set Covering Problem*, In Annals of Operations Research 98, 2000, Kluwer Academic Publishers, pp. 353–371

[9] CORNUÉJOLS, G., NEMHAUSER, G.L., WOLSEY, L.A. (1980). *A canonical representation of simple plant location problems and its applicaitons*. In SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 1 (3), 1980, pp. 261-272

[10] CORNUÉJOLS, G., NEMHAUSER, G.L., WOLSEY, L.A. (1990). *The uncapacitated facility location problem*. In P. B. Mirchandani, P., B., Francis, R., L., (Eds.), Discrete location theory, New York: Wiley, 1990, pp. 119–171

[11] CPLEX homepage, [online], [posledný prístup 2013-01-10], dostupné na internete: http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/

[12] CRAINIC, T. G. (2003). *Long-haul freight transportation*. In Handbook of Transportation Science. New York: Springer, 2003

[13] CUDRÁK, P. (2011). *Informatický nástroj na hľadanie stredísk verejného obslužného systému v rozľahlej sieti*: diplomová práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, 83 s.

[14] CURRENT, J., DASKIN, M., SCHILLING, D. (2002). *Discrete network location models*. In Drezner, Zvi (ed.) et al. Facility location: Applications and theory. Berlin: Springer, 2002, pp. 81-118

[15] DASKIN, M. S. (1995). *Network and Discrete Location. Models, Algorithms, and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1995

[16] DOERNER, K. F. et al. (2005). *Heuristic solution of an extended double-coverage ambulance location problem for Austria*. In Central European Journal of Ope. Research, 2005, Vol. 13, No 4, pp. 325-340

[17] DREZNER, Z. (1995). *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, Springer Verlag, New York, 1995

[18] ERLENKOTTER, D. (1978). *A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location*. Operations Research, Vol. 26, No 6, 1978, pp. 992-1009

[19] GALVAO, R. D. (1980). *A dual-bounded algorithm for the p-median problem*. In Operations Research 28, 1980, pp. 1112-1121

[20] GARCIA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. (2011). *Solving large p-median problems with a radius formulation*. In INFORMS Journal on Computing 23 (4), 2011, pp. 546-556

[21] GARCIA-LOPEZ, F. et al. (2003). *Parallelization of the scatter search for the p-median problem*. In Parallel Computing, 29 (3), 2003, pp. 575-589

[22] GARCIA-LOPEZ, F. et al. (2002). *The paralel variable neighborhood search for the p-median problem*. In Journal of Heuristics 8 (3), 2002, pp. 375-388

[23] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, 1979

[24] GOLDENGORIN, B., KRUSHINSKY, D. (2011). *Complexity evaluation of benchmark instances for the p-median problem*. In Mathematical and Computer Modelling 53, 2011, pp. 1719–1736

[25] GUROBI homepage, [online], [posledný prístup 2013-01-10], dostupné na internete: http://www.gurobi.com/

[26] HAKIMI, S. L. (1964). *Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph*. In Oper. Res. 12(3), pp. 450–459

[27] HANSEN, P. et al. (2009). *Solving large p-median clustering problems by primal–dual variable neighborhood search*. In Data Mining and Knowledge Discovery 19(3), 2009, pp. 351-375

[28] HANSEN, P., MLADENOVIČ, N. (1997). *Variable neighbourhood search for the p-median*. In Location Science 5, 1997, pp. 207-226

[29] HANSEN, P., MLADENOVIČ, N., PEREZ-BRITO, D. (2001). *Variable neighborhood decomposition search*. In Journal of Heuristics 7(3), 2001, pp. 335-350

[30] JABLONSKÝ, J. (2002). *Systémy na podporu rozhodování*. In Proceedings of the 8th International Scientific Conference „Quantitative Methods in Economy and Business-Methodology and Practice in the New Millennium“, FHI EU Bratislava, 18.-20.Sept. 2002, pp. 33-39

[31] JANÁČEK, J. (2008). *Alokační a pokrývací modely návrhu veřejného obslužného systému*. In Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi: Metody návrhu veřejných obslužných systémů, Pardubice: Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, 2008, ISBN 978-80-7395-076-7, str. 13-25

[32] JANÁČEK, J. (2008). *Approximate Covering Models of Location Problems*. In Lecture Notes in Management Science: Proceedings of the 1st International Conference on Applied Operational Research ICAOR ´08, Vol. 1, September 2008, Yerevan, Armenia, ISSN 2008-0050, pp. 53-61

[33] JANÁČEK, J. (2008). *Approximative Covering Models for Emergency System Design*. In Quantitative Methods in Economics: Proceedings of the International Scientific Conference: June 5.-7. 2008, High Tatras, Bratislava: Iura Edition, 2008, ISBN 978-80-8078-217-7, pp. 109-115

[34] JANÁČEK, J. (2008). *Aproximace matice vzdáleností zónováním*. In Sborník příspěvků Modelování a rozhodování ve veřejné správě 2008, Vítkovice v Krkonoších, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2008, ISBN 978-80-7395-119-1, str. 24-28

[35] JANÁČEK, J. (2010). *Informatické nástroje pro podporu rozhodování v krizových situacích*. In Zborník príspevkov 7. medzinárodnej konferencie mladých vedeckých pracovníkov Mladá veda 2010: 9.-10.11.2010 [CD-ROM], Žilina: Žilinská univerzita, Fakulta špeciálneho inžinierstva, 2010, ISBN 978-80-554-0272-7

[36] JANÁČEK, J. (2007). *Kritéria kvality systému stanic záchranné služby*. In Sborník příspevků Infotrans 2007: 25.-26.9. 2007, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2007, ISBN 978-80-7194-989-3, str. 125-130

[37] JANÁČEK, J. (2011). *Lower bound on large p-median problem using the sequential zone adjustment method*. In Mathematical methods in Economics 2011: September 6-9.2011, Jánska Dolina, Slovakia, Praha: Professional Publishing, 2011, ISBN 978-80-7431-059-1, pp. 317-320

[38] JANÁČEK, J. (2003). *Matematické programování*. Druhé opravené vydanie, Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2003, ISBN 80-8070-054-0, 225 s.

[39] JANÁČEK, J. (1985). *Operační analýza I*, učebné texty, Alfa Bratislava, 1985, 202 s.

[40] JANÁČEK, J. (2006). *Optimalizace na dopravních sítích*. Druhé prepracované vydanie. Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2006, ISBN 80-8070-586-0, 248 s.

[41] JANÁČEK, J. (2008). *Použití komerčního IP-Solveru pro řešení umisťovacích úloh*. In Perner´s Contacts: elektronický časopis o technologii, technice a logistice v dopravě [online], 2008, ročník 3, číslo 5 – mimoriadne číslo, [citované 2012-11-21], http://pernerscontacts.upce.cz/12_2008/janacek.pdf, ISSN 1801-674X

[42] JANÁČEK, J. (2009). *Řešení pokrývacích úloh s nejistotou pomocí IP-solveru*. In Sborník příspevků Dopravní systémy 2009, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009, ISBN 978-80-86530-63-5, str. 168-176

[43] JANÁČEK, J. (2006). *Safety on Roads from View of Emergency System Design*. In Journal of Information, Control and Management Systems, Vol. 4, No 2/1, pp. 91-101

[44] JANÁČEK, J. (2008). *Vliv způsobu zónování relevantních vzdáleností na kvalitu aproximativního pokrývacího modelu*. In Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi: Lokace středisek obsluhy s negativními vlivy na okolí, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2008, ISBN 978-80-7395-138-2, str. 23-34

[45] JANÁČEK, J. a kol. (2010). *Navrhovanie územne rozľahlých obslužných systémov*, Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2010, ISBN 978-80-554-0219-2, 404 s.

[46] JANÁČEK, J., BUZNA, Ľ. (2008). *An acceleration of Erlenkotter-Körkel's algoriths for uncapacitated facility location problem*. In Annals of OR, 2008, Vol. 164, No. 1, ISSN 0254-5330, pp. 97-109

[47] JANÁČEK J., BUZNA Ľ. (2007). *Facility location in distribution systems*. Žilina: EDIS Publisher, 2007, ISBN 978-80-8070-649-4, 142 p.

[48] JANÁČEK J., BUZNA Ľ. (2009). *Optimization in networks*, Žilina: EDIS Publisher, 2009, ISBN 978-80-8070-985-3, 158 p.

[49] JANÁČEK, J., JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. (2008). *Computability of the emergency service system design problem*. In Communications - Scientific Letters of the University of Žilina, 2008, Vol. 10, No. 2, ISSN 1335-4205, pp. 5-9

[50] JANÁČEK, J., JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ., BUZNA, Ľ. (2012). *Optimized Design of Large-Scale Social Welfare Supporting Systems on Complex Networks*. In Handbook of optimization in complex networks: theory and applications, New York: Springer Science+Business Media, ISBN 978-1-4614-0753-9, e-ISBN 978-1-4614-0754-6, 2012, pp. 337-361, Springer optimization and its applications, 57, ISSN 1931-6828

[51] JANÁČEK, J., KOHÁNI, M. (2005). *Exact solving of the many-to-many distribution system design*. In Journal of Information, Control and Management Systems, Vol. 3, No. 1, ISSN 1336-1716, pp. 17-26

[52] JANÁČEK, J., KOVAČIKOVÁ, J. (1997). *Exact Solution Techniques for Large Location Problems*. In Proceedings of the Mathematical Methods in Economics 1997, Ostrava, 9.-11.9.1997, pp. 80-84

[53] JANÁČEK, J., KVET, M. (2011). *Approximate solving of large p-median problems.* In Operational research peripatetic post-graduate programme: Cádiz, Spain. September 13-17, 2011, Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2011, ISBN 978-84-9828-348-8, pp. 221-225

[54] JANÁČEK, J., KVET, M. (2011). *Sequential zone adjustment for approximate solving of large p-median problems.* In Operations Research Proceedings 2011: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR 2011), August 30-September 2, 2011, Zürich, Switzerland, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, ISBN 978-3-642-29209-5, pp. 269-274

[55] JANÁČEK, J., LINDA, B., RITSCHELOVÁ, I. (2010). *Optimization of Municipalities with Extended Competence Selection*. In Prager Economic Papers – Quarterly Journal of Economic Theory and Policy, Vol. 19, No 1, 2010, pp. 21-34

[56] JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A. (2006). *An impact of set of centres of distribution system design problem on computational time of solving algorithm*. In Mikulski J (ed). Advances in Transport Systems Telematics, Katowice, pp. 109-112

[57] JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A. (2006). *Niektoré parametre pre umiestňovanie kandidátov v úlohe p-mediánu.* In Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2012: Využití telematiky v dopravních a logistických systémech, Využití IP Solveru při řešení úloh diskrétni lokace, 18.5.2012, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012, ISBN 978-80-7395-554-0, str. 26-33

[58] JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. (2007). *Emergency Medical Service Planning*. In Communications Scientific Letters of the University of Žilina, Vol. 9, No 2, Žilina: EDIS publisher, 2007, ISSN 1335-4205, pp. 64-68

[59] JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. (2007). *Optimálne umiestnenie staníc záchrannej zdravotnej služby z hľadiska dopravnej dostupnosti*. In Sborník příspěvků mezinárodní konference Infotrans 2007: 25.-26.9. 2007, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2007, ISBN 978-80-7194-989-3, str. 143-148

[60] JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. (2009). *Reduction of a hospital network as a multiple criteria optimisation problem*. In Ekonomie a management, ISSN 1212-3609, 2009, vol. XII, no. 3, pp. 50–57

[61] JARVINEN, P., RAJALA, J., SINERVO, H. (1972). *A branch-and-bound algorithm for seeking the p-median*. In Operations Research 20(1), 1972, pp. 173-178

[62] KARIV, O., HAKIMI, S. L. (1979). *An algorithmic approach to network location problems II: The p-medians*. In *SIAM J. Appl. Math. Oper. Res.* 37(3), pp. 539–560

[63] KOHÁNI, M. (2005). *Linearization of quadratic semi-assigment problem*. In TRANSCOM 2005: 6-th European Conference of Young Research and Science Workers in Transport and Telecommunications: Žilina, 27-29 June 2005: proceedings. Section 3: Information and Communication Technologies, Žilina: University of Žilina, ISBN 80-8070-415-5, pp. 159-162

[64] KOLEN, A., TAMIR, A. (1990). *Covering problems*. In P.B. Mirchandani, R.L. Francis, eds.: *Discrete Location Theory*, John Wiley and Sons, 1990

[65] KÖRKEL, M. (1989). *On the exact solution of large – scale simple plant location problem*. In European Journal of Operational Research 39, North Holland, pp. 157-173

[66] KVET, M. (2011). *Applications of the set covering problem.* In Zimná škola MICT: mathematics for information and communication technologies: 6th winter school of mathematics for ICT: Šachtičky 3.-8.1.2011, Banská Bystrica: Science and Research Institute, 2011, ISBN 978-80-557-0252-0, pp. 67-70

[67] KVET, M. (2011). *Aproximácia matice vzdialenosti pre približné riešenie rozsiahlych úloh p-mediánu.* In Sborník příspěvků konference INFOTRANS 2011: 28.4. 2011, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011, ISBN 978-80-7395-397-3, str. 123-128

[68] KVET, M. (2010). *Umiestňovanie zdrojov na riešenie krízových javov*. In Zborník príspevkov 7. medzinárodnej konferencie mladých vedeckých pracovníkov Mladá veda 2010, 9.-10.11.2010, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta špeciálneho inžinierstva, 2010, ISBN 978-80-554-0272-7

[69] LEVANOVA, T. V., LORESH, M. A. (2004). *Algorithms of ant system and simulated annealing for the p-median problem*. In Automation and Remote Control 65(3), 2004, pp. 431-438

[70] MARIANOV, V., SERRA, D. (2004). *Location problems in the public sector*. In Drezner, Z., Hamacher, H. W. (editors) Facility Location: Applications and Theory, 1st ed. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2004, ISBN 3-540-21345-7

[71] MEDVIĎ, V. (2008). *Riešenie úlohy vrcholového pokrytia s rôznymi cenami vrcholov*. In Perner´s Contacts: elektronický časopis o technologii, technice a logistice v dopravě [online], 2008, ročník 3, číslo 5 – mimoriadne číslo, [citované 2012-11-21], dostupné na internete: http://pernerscontacts.upce.cz/12_2008/medvid.pdf, ISSN 1801-674X

[72] MEDVIĎ, V. (2010). *Úloha rozmiestňovania kontrolných bodov v komunikačných sieťach*: dizertačná práca. Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, 2010, 101 s.

[73] MLADENOVIČ, N. et al. (2007). *The p-median problem: a survey of metaheuristic approaches*. In European Journal of Operational Research, 179(3), 2007, pp. 927–939

[74] MOSCATO, P., COTTA, C. (2003). *A Gentle Introduction to Memetic Algorithms*. In Glover, F., Kochenberg, G., A.: (Eds.) Handbook of metaheuristics, Kluwer Academic Publishers, 2003, ISBN 0-306-48056-5

[75] MOSEK homepage, [online], [posledný prístup 2013-01-10], dostupné na internete: http://www.mosek.com/

[76] NAUSS, R. M., MARKLAND, R. E. (1981). *Theory and application of an optimizing procedure for lock box location analysis*. Management Science 27, 1981, pp. 855-865

[77] NICKEL, S., PUERTO, J. (2005). *Location Theory*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2005

[78] OR-Lib benchmarks, [posledný prístup 2013-01-25], dostupné na internete: http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/pmedinfo.html.

[79] OWEN, H. O., DASKIN, M. S. (1998). *Strategic facility location: a review*. In European Journal of Operational Research 111, 1998, pp. 423-447

[80] PACHECO, J. A. et al. (2008). *Heuristic solutions for locating health resources*. IEEE Intelligent Systems 23(1), 2008, pp. 57-63

[81] PALÚCH, S. (2008). *Algoritmická teória grafov*: skriptá [online], 2008, [citované 2012-11-21], dostupné na internete: http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf,

[82] PRABHAVALKAR, R. (2009). *The Set-Covering Problem - Advanced Algorithms*, [online], 2009, [citované 2011-01-10], http://www.cse.ohio-state.edu/~tamaldey/course/790/set-cover.pdf

[83] RAO, M. R. (1971). *Cluster analysis and mathematical programming*. In Journal of the American Statistical Association, 6, 1971, pp. 622–626

[84] REESE, J. (2006). *Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography*. In *Networks* 48(3), pp. 125–142, DOI 10.1002/net.20128, Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)

[85] REEVES C. R. (2010). *Genetic Algorithms*. In: Handbook of Metaheuristics, ed. Gendreau, M., Potvin, J.Y., Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2nd edition, 2010, ISBN 978-1-4419-1663-1

[86] REEVES, C. R. (1993). *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. Oxford Blackwell Scientific Publications, ISBN 0-632-03238-3, 320 p.

[87] RESENDE, M. G. C., WERNECK, R. F. (2004). *A Hybrid Heuristic for the p-Median Problem*. In Journal of Heuristics, volume 10, number 1, 2004, pp. 59-88

[88] REVELLE, C. S., EISELT, H. A., DASKIN, M. S. (2008). *A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science*, In European Journal of OR 184, 2008, pp. 817–848

[89] ROLLAND, E., SCHILLING, D. A., CURRENT, J.R. (1996). *An efficient tabu search procedure for the p-median problem*. In European Journal of Operations Research 96, 1996, pp. 329-342

[90] SENNE, E. L. F., LORENA, L. A. N. (2000) *Langrangean/surrogate heuristics for p-median problems*. In M. Laguna, J. L. González-Velarde: Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Oper. Research, 2000, Kluwer, pp. 115-130

[91] SOUKAL, R. (2012). *Genetický algoritmus pre riešenie lokačných úloh v návrhu verejného obslužného systému*. Diplomová práca, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline, 2012, 91 s.

[92] TEICHMANN, D. (2009). *Příspěvek k problematice evakuace obyvatelstva a možnosti využití matematického programování při jejím plánování*. In Krízový management, Fakulta špeciálneho inžinierstva, Žilinská univerzita v Žiline, Vol. 8, No. 1, pp. 91-94

[93] TOMAN, Ľ. (2013). *Sofistikované nástroje na podporu rozhodovania v podmienkach neistoty pri návrhu verejných obslužných systémov evakuačného typu*: dizertačná práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, 2013

[94] TOREGAS, C. et al. (1971). *The Location of Emergency Service Facilities*, In Operations Research, Vol. 19, No. 6, pp. 1363–1373

[95] TSPLIB benchmarks, [posledný prístup 2013-01-25], dostupné na internete: http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/

[96] VINOD, H. D. (1969). *Integer programming and the theory of groups*. In Journal of the American Statistical Association, 6, 1969, pp. 506–519

[97] WILLIAMS, H. P. (1993). *Model Solving in Mathematical Programming*, John Wiley & Sons, New York, ISBN 0-471-93722-3

[98] WOEGINGER, G. J. (2003). *Algorithms for NP-Hard Problems: A Survey*. In Juenger, M., Reinelt, G., Rinaldi, G.: Combinatorial Optimization – Eureka, You Shrink!, Papers Dedicated to Jack Edmonds, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2003, ISBN 3-540-00580-3

[99] XPRESS Optimization Suite - Student Edition, [posledný prístup 2013-01-10], dostupné na internete: http://optimization.fico.com/student-version-of-fico-xpress.html

[100] XPRESS-Mosel “User guide”, Dash Associates, Blisworth, 2005, UK, 99 s.