

**ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE**  
**FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY**

**EFEKTÍVNE ALGORITMY NA RIEŠENIE ÚLOHY**  
**ROZMIESTNENIA NABÍJACÍCH ÚSEKOV**  
**V DOPRAVNEJ SIETI**

**Dizertačná práca**

**Kód: 28360020213008**

Študijný program: Inteligentné informačné systémy

Študijný odbor: Informatika

Pracovisko: Katedra matematických metód a operačnej analýzy

Fakulta: Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline

Školiteľ: doc. Ing. Michal Koháni, PhD.

**Žilina, 2021**

**Ing. Dobroslav Grygar**

# Pod'akovanie

V prvom rade patrí moje pod'akovanie Fakulte riadenia a informatiky, kde som ako študent strávil už takmer 8 rokov. Či už vedeniu, kolegom, spolužiakom a kamarátom, ktorých som tu spoznal. Vďaka rozhodnutiu pokračovať na doktorandskom štúdiu som spoznal fakultu aj z pohľadu vyučujúceho. Vážim si všetky vedomosti a skúsenosti, ktoré som tu mohol získať. Popri tom som rád za všetky zážitky, či už išlo o fakultné podujatia, túry či konferencie. Ďakujem aj za dôveru pri fotografovaní rôznych, aj tých najdôležitejších, podujatí na našej fakulte.

Osobitne ďakujem doc. Ing. Michalovi Kohánimu, PhD. za odborný a priateľský prístup pri vedení dizertačnej práce. Ďalej by som rád poďakoval prof. RNDr. Jaroslavovi Janáčkovi, CSc. za mnoho odborných rád počas štúdia a pri práci na výskume k dizertačnej téme. Okrem toho ďakujem aj zvyšnému kolektívu Katedry matematických metód a operačnej analýzy, predovšetkým vedúcej prof. Ing. Ludmile Jánošíkovej, PhD. a kolegovi Ing. Marošovi Janovcovi. Rád by som poďakoval aj prodekanovi doc. Ing. Viliamovi Lendelovi, PhD. za skvelú atmosféru, ktorú na fakulte pomáha vytvárať.

V neposlednom rade ďakujem mojim rodičom za podporu počas celého trvania štúdia.

# Abstrakt

GRYGAR, Dobroslav: Efektívne algoritmy na riešenie úlohy rozmiestnenia nabíjacích úsekov v dopravnej sieti. [Dizertačná práca]. – Žilinská univerzita v Žiline. Fakulta riadenia a informatiky; Katedra matematických metód a operačnej analýzy. – Školiteľ: doc. Ing. Michal Koháni, PhD. – Žilina: FRI UNIZA, 2021. Počet strán: 97.

Táto dizertačná práca sa zameriava na výskum efektívnych algoritmov na návrh infraštruktúry pre parciálne trolejbusy. Špecificky sa venuje úlohe návrhu minimálnej siete trolejových vedení, ktoré by boli dostatočné pre nabíjanie a prevádzku trolejbusov doplnených o batériu, ako náhradný zdroj energie.

Prvá časť práce popisuje riešený problém a vysvetľuje potrebné pojmy. Dizertačná práca sa ďalej venuje analýze súčasného stavu riešenej problematiky, či už ide o technológiu parciálnych trolejbusov a trolejových vedení, prípadne ich reálne nasadenie. Okrem toho sa venuje aj prieskumu už dostupných metód na riešenie podobných problémov.

Ďalej predstavuje a analyzuje metódy a nástroje, ktoré môžu byť použité na riešenie problému. Ako napríklad nástroje na exaktné, respektíve približné riešenie úloh lineárneho programovania.

Po vysvetlení cieľov a metodiky sa práca venuje výsledkom výskumu a ich hodnoteniu. V tejto časti sa čitateľ dozvie o dátach, ktoré boli využité pri overovaní jednotlivých prístupov. Následne predstavíme tri lineárne modely úlohy a ich modifikácie, ktoré medzi sebou porovnáваме. Okrem exaktných spôsobov riešenia predstavíme aj niekoľko heuristických prístupov. Všetky predstavené prístupy k riešeniu úlohy overujeme pomocou experimentov. Na záver zhodnotíme priebeh výskumu a stanovíme možné smerovanie do budúcnosti.

**Kľúčové slová:** Efektívne algoritmy, exaktné riešenie, heuristiky, lokačná úloha, trolejové vedenie, parciálny trolejbus, lineárny model, elektrovozidlo, verejná doprava, infraštruktúra.

# Abstract

GRYGAR, Dobroslav: Effective algorithms for solving the problem of deployment charging road segments in the transport network. [Dissertation thesis]. – University of Žilina. Faculty of Management Science and Informatics; Department of Mathematical Methods and Operations Research. – Supervisor: doc. Ing. Michal Koháni, PhD. – Žilina: FRI UNIZA, 2021. Number of pages: 97.

This dissertation thesis focuses on effective research algorithms for the designing of infrastructure for battery-assisted trolleybuses. Specifically, it deals with the problem of the design of the minimal overhead contact wires network that can be sufficient for the operation and charging of trolleybuses equipped with a battery as an additional power source.

The first part of the thesis describes the problem solving process and explains the necessary terms. The dissertation thesis also analyses the current state of this problem solving process. Whether it is the technology of battery-assisted trolleybuses and overhead lines or their real deployment. Besides, it also covers already existing methods for solving similar problems.

Furthermore, it also introduces and analyzes methods that can be used to solve the problem. Such as tools for the exact or heuristic solving of similar linear programming problems.

After explaining the objectives and methodology for the research, the thesis deals with the research results and their evaluation. In this section, the reader will find the data used to verify individual approaches. Then, we will present three linear models of the problem and their modifications, which we compare to each other. Apart from exact approaches, we will also present several heuristic approaches. We verify the presented approaches by performing experiments with prepared benchmarks. Finally, we sum up the research and determine the possible options for future research.

**Keywords:** Effective algorithms, exact solving, heuristics, location problem, overhead contact line, battery assisted trolleybus, linear model, electric vehicle, public transport, infrastructure.

# Prehlásenie

Prehlasujem, že som dizertačnú prácu spracoval samostatne a že som uviedol všetky použité pramene a literatúru, z ktorých som čerpal.

V Žiline, dňa 23.04.2021

Podpis.....

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Úloha návrhu budovania nabíjacích úsekov v dopravnej sieti</b>	<b>15</b>
2.1	Popis úlohy . . . . .	15
2.2	Vysvetlenie pojmov . . . . .	16
2.2.1	Digraf cestnej siete . . . . .	16
2.2.2	Spoj a linka . . . . .	17
2.2.3	Servisná jazda . . . . .	18
2.2.4	Turnus vozidla . . . . .	18
2.2.5	Stav nabitia batérie . . . . .	18
2.2.6	Digraf úsekov turnusu . . . . .	19
2.2.7	Digraf stavu nabitia batérie . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Analýza existujúceho stavu</b>	<b>21</b>
3.1	Dostupné technológie vozidiel . . . . .	22
3.1.1	Parciálny trolejbus . . . . .	22
3.1.2	Trolejové vedenie ako spôsob nabíjania vozidla . . . . .	24
3.1.3	Faktory prostredia . . . . .	25
3.2	Nasadenie parciálnych trolejbusov . . . . .	25
3.2.1	Nasadenie na vybraných trasách . . . . .	26
3.2.2	Prehľad existujúcich prístupov k riešeniu úlohy návrhu nabíjacej infraštruktúry na hranách . . . . .	26
3.2.3	Umiestňovanie indukčného vedenia SOC prístup . . . . .	27
3.2.4	Ďalšie prístupy . . . . .	29
3.3	Lokačná úloha . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analýza metód a nástrojov na riešenie problému</b>	<b>31</b>
4.1	Nástroje na exaktné riešenie úloh lineárneho programovania . . . . .	31
4.1.1	Simplexová metóda . . . . .	31
4.1.2	Duálna simplexová metóda . . . . .	32
4.1.3	Metóda vetiev a hraníc . . . . .	33

4.1.4	Metóda generovania stĺpcov . . . . .	34
4.1.5	Erlenkotterov prístup ku kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohe . . . . .	35
4.2	Nástroje na približné riešenie optimalizačných úloh . . . . .	36
4.2.1	Heuristiky . . . . .	36
4.2.2	Kernel Search . . . . .	38
4.2.3	Metaheuristiky . . . . .	39
4.2.4	Simulated Annealing . . . . .	39
4.2.5	Genetický algoritmus . . . . .	40
4.3	Simulačné nástroje na overenie riešenia . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Cieľ a metodika práce</b>	<b>43</b>
5.1	Ciele práce . . . . .	43
5.2	Metodika práce . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Výsledky a ich zhodnotenie</b>	<b>46</b>
6.1	Popis testovacích dát . . . . .	46
6.1.1	Malá testovacia úloha . . . . .	47
6.1.2	Vstupné dáta pre prechodový model . . . . .	48
6.1.3	Testovacie úlohy pre heuristiku s využitím prechodového modelu . . . . .	50
6.1.4	Vstupné dáta pre lokačné modely . . . . .	51
6.2	Prechodový model na umiestňovanie vedenia podľa liniek . . . . .	53
6.2.1	Matematický model úlohy . . . . .	53
6.2.2	Numerické experimenty . . . . .	55
6.2.3	Úprava matematického modelu . . . . .	55
6.2.4	Heuristická metóda na riešenie turnusov s využitím prechodového modelu . . . . .	56
6.2.5	Zhodnotenie . . . . .	59
6.3	Lokačný model úlohy . . . . .	60
6.3.1	Základný lokačný model úlohy . . . . .	60
6.3.2	Substituovaný model úlohy . . . . .	62
6.3.3	Porovnanie prechodového a lokačných modelov . . . . .	63
6.3.4	Numerické experimenty a porovnanie lokačných modelov . . . . .	63
6.3.5	Pažravá heuristika . . . . .	67
6.3.6	Metaheuristika Simulated Annealing . . . . .	69
6.3.7	Heuristika Kernel Search na základe lokačného modelu . . . . .	72
6.3.8	Zhodnotenie . . . . .	74
6.4	Zovšeobecný model . . . . .	75
6.4.1	Formulácia zovšeobecného modelu úlohy . . . . .	75
6.4.2	Porovnanie zovšeobecného a lokačného modelu úlohy . . . . .	77

6.4.3	Riešenie úlohy doplnenia existujúcej siete trolejových vedení pomocou zovšeobecneného modelu . . . . .	78
6.4.4	Zhodnotenie . . . . .	79
6.5	Overenie robustnosti riešení . . . . .	79
6.5.1	Spôsob a nastavenie prepočtu robustnosti riešení . . . . .	80
6.5.2	Testovanie robustnosti riešení . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Záver</b>	<b>84</b>
7.1	Záverečné odporúčania pre ďalšiu prácu . . . . .	85
	<b>Prílohy</b>	<b>93</b>
	Príloha A: Zoznam vlastných publikácií . . . . .	94
	Príloha B: Ukážka súboru s dátami . . . . .	96
	Príloha C: DVD . . . . .	97



# Zoznam obrázkov

2.1	Zjednodušený náčrt riešeného problému. Máme niekoľko liniek (v tomto prípade tri), ktoré majú niektoré časti trás spoločné a iné samostatné. Z týchto úsekov vyberáme tak, aby vznikla minimálna nabíjacia sieť trolejových vedení. . . . .	16
2.2	Ukážka digrafu [8]. . . . .	16
2.3	Ukážka linky 21 v Žiline . . . . .	17
2.4	Vytváranie digrafu úsekov cesty z digrafu cestnej siete. a) Príklad digrafu cestnej siete. Linka autobusu (so zastávkami 1, 3, 7, 6) je označená oranžovou farbou. Vrcholy sú zastávky a hrany úseky. b) Digraf úsekov cesty vytvorený pre linku. Vrcholy sú segmenty trasy. AN je umelý vrchol reprezentujúci <i>SOC</i> vozidla po skončení jazdy [21]. Pre zjednodušenie v príklade neuvažujeme križovatky mimo zastávok. . . . .	19
2.5	Zjednodušený príklad digrafu stavu nabitia batérie. Riadky reprezentujú jednotlivé úrovne nabitia a vrcholy sú segmenty trasy. Prechody medzi úrovňami nabitia sú značené 1, ak je vozidlo nabíjané a 0, ak nie je. [21]. . . . .	20
3.1	Náčrt základnej myšlienky parciálnych trolejbusov a <i>IMC</i> [©Vossloh Kiepe] [2]. . . . .	21
3.2	Ilustrácia kľúčových komponentov parciálneho trolejbusu [55].	22
3.3	Parciálny trolejbus, ktorý práve používa zariadenie na pripájanie sa k trolejovému vedeniu [24] . . . . .	24
3.4	Parciálny trolejbus používaný <i>DPMŽ</i> v Mojši pri Žiline, kde nevedie trolejové vedenie [10] . . . . .	25
4.1	Ukážka stromu riešení, ktorý je možné spracovať pomocou metódy vetiev a hraníc [37]. . . . .	33
4.2	Ukážka rozhrania nástroja OptSim. . . . .	42
6.1	Linky v meste Žilina počas dňa . . . . .	47
6.2	Ilustrácia malej testovacej úlohy . . . . .	48

6.3	Ukážka vybraných liniek v meste Žilina. . . . .	49
6.4	Ilustrácia vzťahov medzi rozhodovacími premennými a dátami. $y_s$ a $x_{r,i}$ sú rozhodovacie premenné, $w_{r,s,i}$ vstupné dáta (jednotlivé prípustné kombinácie) vysvetlené na obrázku 2.5. Bunky s hodnotou s 0 reprezentujú jednotlivé úseky, kde je alebo nie je potrebné vybudovanie vedení. Modré bunky nie sú použité na danej trase. . . . .	54
6.5	Ilustrácia segmentov pokrytých vedením. . . . .	57
6.6	Ilustrácia segmentov pokrytých vedením. . . . .	58
6.7	Ilustrácia segmentov so stúpaniami. . . . .	80

## Zoznam tabuliek

6.1	Použité linky v Žiline . . . . .	49
6.2	Parametre vozidiel zvolené pre experimenty . . . . .	50
6.3	Vybrané turnusy 4_4a a 5_1a a ich linky. . . . .	50
6.4	Vybrané turnusy vozidiel. . . . .	51
6.5	Zvolené testovacie úlohy. . . . .	52
6.6	Scenáre a parametre vozidiel. . . . .	53
6.7	Trvanie konverzie dát a riešenia úlohy . . . . .	55
6.8	Porovnanie pôvodného modelu a upravenej verzie. . . . .	56
6.9	Vybrané úseky segmentov v riešení. . . . .	57
6.10	Porovnanie riešení pomocou modelov . . . . .	58
6.11	Vybrané segmenty v riešení. . . . .	59
6.12	Porovnanie hodnôt účelových funkcií (m) nájdených pomocou prechodového a lokačných modelov . . . . .	63
6.13	Porovnanie času výpočtu (s) prechodového a lokačných modelov	63
6.14	Výsledky a porovnanie modelov - jarný scenár. . . . .	64
6.15	Časové porovnanie modelov - jarný scenár. . . . .	64
6.16	Výsledky a porovnanie modelov - letný scenár. . . . .	65
6.17	Časové porovnanie modelov - letný scenár. . . . .	65
6.18	Výsledky a porovnanie modelov - zimný scenár. . . . .	66
6.19	Časové porovnanie modelov - zimný scenár. . . . .	66
6.20	Výsledky a porovnanie exaktného a pažravého heuristického prístupu - jarný scenár. . . . .	68
6.21	Výsledky a porovnanie exaktného a pažravého heuristického prístupu - letný scenár. . . . .	68
6.22	Výsledky a porovnanie exaktného a pažravého heuristického prístupu - zimný scenár. . . . .	68
6.23	Vplyv nastavenia hodnoty parametra T na výkon SA . . . . .	70
6.24	Výsledné použité hodnoty parametrov v heuristike . . . . .	70
6.25	Výsledky a porovnanie exaktného a SA metaheuristického prí- stupu - jarný scenár. . . . .	71

6.26	Výsledky a porovnanie exaktného a SA metaheuristického prístupu - letný scenár. . . . .	71
6.27	Výsledky a porovnanie exaktného a SA metaheuristického prístupu - zimný scenár. . . . .	71
6.28	Vstupné parametre pre heuristiku Kernel Search . . . . .	72
6.29	Výsledky a porovnanie exaktného a heuristického prístupu - jarný scenár. . . . .	73
6.30	Výsledky a porovnanie exaktného a heuristického prístupu - letný scenár. . . . .	73
6.31	Výsledky a porovnanie exaktného a heuristického prístupu - zimný scenár. . . . .	74
6.32	Výsledky a porovnanie substituovaného a zovšeobecného - jarný scenár. . . . .	77
6.33	Výsledky a porovnanie substituovaného a zovšeobecného - letný scenár. . . . .	77
6.34	Výsledky a porovnanie substituovaného a zovšeobecného - zimný scenár. . . . .	77
6.35	Zovšeobecný model - výsledky . . . . .	78
6.36	Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m - jarný scenár. . . . .	82
6.37	Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.00065 kWh/m - jarný scenár. . . . .	82
6.38	Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m - letný scenár. . . . .	82
6.39	Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.00065 kWh/m - letný scenár. . . . .	83
6.40	Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m - zimný scenár. . . . .	83
6.41	Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.00065 kWh/m - zimný scenár. . . . .	83

# Zoznam použitých skratiek

<i>BWC</i>	<i>Betweenness Centrality</i> – Medzilahlá centralita vektora
<i>DPMŽ</i>	<i>Dopravný podnik mesta Žiliny s.r.o</i> – spoločnosť poskytujúca mestskú hromadnú dopravu v Žiline
<i>EV</i>	<i>Electric Vehicle</i> – Vozidlo na elektrický pohon
<i>EVC</i>	<i>Eigenvector Centrality</i> – Centrálnosť vlastného vektora
<i>GA</i>	<i>Genetic Algorithm</i> – Genetický algoritmus
<i>ID</i>	<i>Identifier</i> – Identifikátor
<i>IMC</i>	<i>In motion charging</i> – Nabíjanie počas jazdy
<i>IP</i>	<i>Integer programming</i> – Celočíselné programovanie
<i>kWh</i>	<i>kilowatt-hour</i> – kilowatthodina
<i>kWh/m</i>	<i>kilowatt-hour / meter</i> – kilowatthodina na meter
<i>LP</i>	<i>Linear programming</i> – Lineárne programovanie
<i>MHD</i>	<i>Mestská hromadná doprava</i> – označenie pre osobnú hromadnú prepravu v mestách
<i>ODbL</i>	<i>Open Database License</i> – licencia, ktorá umožňuje slobodne zdieľať, upravovať a používať databázu za podmienky zachovania rovnakej slobody pre ostatných používateľov.
<i>OSM</i>	<i>OpenStreetMap</i> – mapový projekt, ktorého cieľom je tvorba voľných geografických dát, pod licenciou Open Database License
<i>SOC</i>	<i>State of charge</i> – Stav nabitia batérie

# Kapitola 1

## Úvod

Ako naznačuje názov v tejto práci sa zameriavame na výskum efektívnych algoritmov na návrh infraštruktúry pre parciálne trolejbusy. Aj keď sa jedná o úlohu zo sveta dopravy, je ju možné riešiť prostriedkami, ktoré ponúka informatika, ktorá je zaujímavou oblasťou vedeckého bádania. Je to pomerne nová vedecká disciplína, ktorá vznikla odčlenením od matematiky. Zameriava sa na svoj vlastný objekt skúmania a to metódy zberu, spracovania, ukladania, ochrany, vyhľadávania, poskytovania a prenosu informácií. Ako nástroj využíva výpočtovú techniku [48]. Prínos informatiky je multidisciplinárny, to znamená že jej benefity môžeme jasne vidieť v ďalších vedeckých odboroch. Či už ide o informatiku samotnú, medicínu, dopravu, manažment, elektrotechniku či strojárstvo prípadne umenie. Z toho vyplýva, že pri riešení mnohých problémov a úloh je možné úspešne využiť poznatky z informatiky.

Častou informatickej vedy je aj výskum a vývoj v oblasti systémov na podporu rozhodovania. Tu môžeme zaradiť systémy, ktoré pomáhajú riešiť napríklad rôzne optimalizačné úlohy. Ich výstupom býva obvykle odporúčanie pre rôzne strategické, taktické prípadne operatívne rozhodnutia. Úlohy v rámci návrhu dopravnej infraštruktúry radíme medzi strategické rozhodnutia vzhľadom na to, že ovplyvňujú funkciu a ekonomiku distribučného systému na niekoľko rokov [42].

Doprava má tiež svoj vplyv na prebiehajúce klimatické zmeny. Téma znečistenia ovzdušia sa na celom svete stáva čoraz významnejšou. Počas parížskej konferencie, ktorá sa konala v decembri 2015, bola prijatá historická dohoda až 195 krajín na vytvorení akčného plánu, ktorého cieľom je obmedziť nárast globálneho otepľovania hlboko pod 2 stupne Celzia. Aby to bolo možné dosiahnuť, je nutné zníženie emisií oxidu uhličitého naprieč všetkými odvetviami ekonomiky [16], [62].

Dobrou správou je, že sa ľudia snažia postupne prechádzať na využívanie

menej znečisťujúcich zdrojov energií. Pokiaľ sa jedná o hromadnú dopravu, sme zvyknutí na to, že boli elektrifikované mnohé dôležité železničné trasy. Vo väčších mestách sa používajú trolejbusy, či električky. Nastáva ale otázka, ako vyriešiť menej vyťažené trasy, kde nie je rentabilné vybudovať kompletnú trolejovú sieť [16].

Zaujímavú alternatívu predstavujú parciálne trolejbusy. Jedná sa o trolejbus, ktorý je vybavený doplnkovým zdrojom energie. Ním sú v našom prípade batérie, ktoré umožňujú vozidlu prekonať aj neelektrifikované úseky. Batérie sú dobíjané počas jazdy po úsekoch, ktoré sú pokryté trolejovým vedením. Technológia parciálnych trolejbusov prepája výhody klasických trolejbusov so slobodou pohybu autobusov. Môžeme predpokladať, že záujem o nasadzovanie tejto technológie bude mať stúpajúci trend. Ak chceme využívať parciálne trolejbusy, musíme vyriešiť niekoľko zaujímavých optimalizačných problémov. V našom výskume sa budeme venovať úlohe návrhu infraštruktúry, respektíve trolejových úsekov na infraštruktúre, ktoré budú dostatočné pre nabíjanie a prevádzku parciálnych trolejbusov. Úlohu návrhu takejto infraštruktúry môžeme po istej úprave prirovnať ku lokačnej úlohe. Jedná sa o špecifický typ lokačnej úlohy, kde nebudeme umiestňovať obslužné strediská v uzloch, ale na hranách dopravnej siete.

Pri tomto type úlohy sa jedná o návrh strategických rozhodnutí. Tieto rozhodnutia majú dlhodobú časovú platnosť, keďže sa jedná o návrh pevnej časti infraštruktúry, ktorú treba vybudovať. Infraštruktúru budeme navrhovať podľa turnusov vozidiel verejnej dopravy v danom meste. Aj keď sa jedná o dopravný problém, na jeho riešenie budeme využívať prostriedky, ktoré nám ponúka informatická veda [43].

Táto dizertačná práca začína popisom riešenej úlohy a vysvetlením nevyhnutných pojmov. Následne je definovaný cieľ a metodika práce. Ďalšia časť je venovaná analýze existujúceho stavu riešenej problematiky. Tu sa bližšie venujeme vlastnostiam využívaných vozidiel a faktorom, ktoré vplývajú na ich prevádzku. Následne predstavíme niekoľko podobných úloh a to, ako boli riešené autormi dostupných prác. Dôležitou časťou je aj analýza metód a nástrojov na riešenie problému. Tu vysvetľujeme nástroje na exaktné a približné riešenie úloh matematického programovania. Tento prehľad ponúka dobrý základ do záverečnej časti práce, kde predstavíme a zhodnotíme dosiahnuté výsledky. Tu dizertačná práca predstaví niekoľko matematických modelov, pomocou ktorých je možné úlohu popísať. Pomocou programu na riešenie úloh celočíselného programovania budú vykonané experimenty, na rôznych dátach, pomocou ktorých budeme overovať správnosť a efektívnosť jednotlivých modelov. Následne preskúmame ďalšie heuristické spôsoby riešenia úlohy tvorby minimálnej nabíjacej siete trolejových vedení pre prevádzku parciálnych trolejbusov.

## Kapitola 2

# Úloha návrhu budovania nabíjacích úsekov v dopravnej sieti

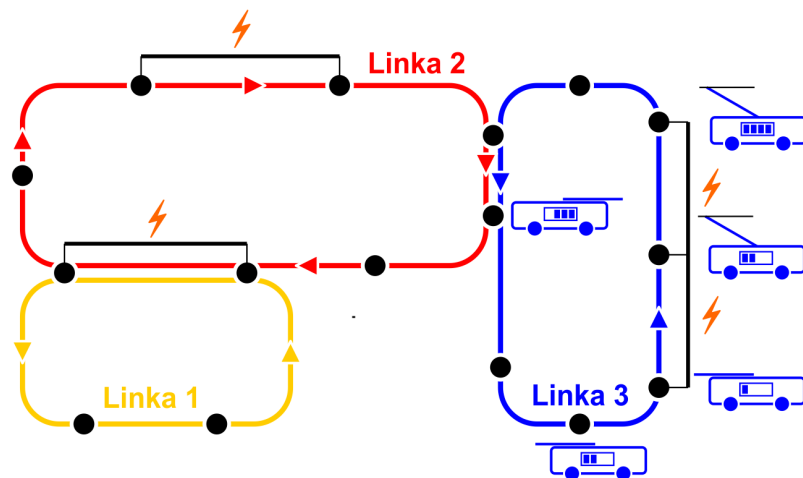
Špecificky sa budeme v práci zameriavať na návrh spôsobov na optimalizáciu minimálnej siete trolejového vedenia, ktorá by bola dostatočná na prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov. Výstavba a údržba takéhoto vedenia tvorí hlavnú časť nákladov celého systému. Preto sa ich snažíme minimalizovať [24].

### 2.1 Popis úlohy

Hromadná doprava je v mestách obsluhovaná pomocou vozidiel. Tieto vozidlá jazdia podľa turnusov, pričom pod pojmom turnus môžeme rozumieť postupnosť liniek. Zastávky, križovatky a depá, ktoré sú vozidlami hromadnej dopravy využívané, sú prepojené úsekmi ciest. Toto všetko spolu tvorí digraf cestnej siete. Na obrázku môžeme vidieť príklad takéhoto digrafu, ktorý je tvorený tromi turnusmi vozidiel. Turnusy môžu mať isté úseky cesty zdieľané a iné úseky, ktoré sú využívané iba jedným turnusom alebo časťou z nich. Nastáva otázka, ako pokryť takúto sieť trolejovým vedením tak, aby bolo možné na danom digrafe nasadiť parciálne trolejbusy. Ilustrácia jednoduchej úlohy s tromi turnusmi na nachádza na obrázku 2.1.

Úlohu návrhu infraštruktúry pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov môžeme po istej úprave prirovnať ku lokačnej úlohe. Jedná sa o lokačnú úlohu na hranách. Hrany v sieti vyberáme tak, aby sme čo najviac znížili celkové náklady na vybudovanie siete. Táto práca sa bude venovať niekoľkým prístupom, či už exaktným alebo približným, ako danú úlohu riešiť.





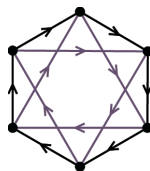
**Obrázok 2.1:** Zjednodušený náčrt riešeného problému. Máme niekoľko liniek (v tomto prípade tri), ktoré majú niektoré časti trás spoločné a iné samostatné. Z týchto úsekov vyberáme tak, aby vznikla minimálna nabíjacia sieť trolejových vedení.

## 2.2 Vysvetlenie pojmov

Pri riešení danej optimalizačnej úlohy sa stretávame s rôznymi pojmami z oblasti informatiky, teórie grafov a dopravy. V tejto časti preto vysvetlíme tie, s ktorými sa čitateľ v práci stretne najčastejšie.

### 2.2.1 Digraf cestnej siete

Usporiadanú dvojicu  $\vec{G} = (V, H)$  kde  $V$  je neprázdna konečná množina a  $H$  je množina usporiadaných dvojíc typu  $(u, v)$  takých, že  $u \in V, v \in V$  a  $u \neq v$  nazveme digrafom. Teda  $H$  je množina hrán a  $V$  je množina vrcholov [51]. Príklad digrafu je na obrázku 2.2.



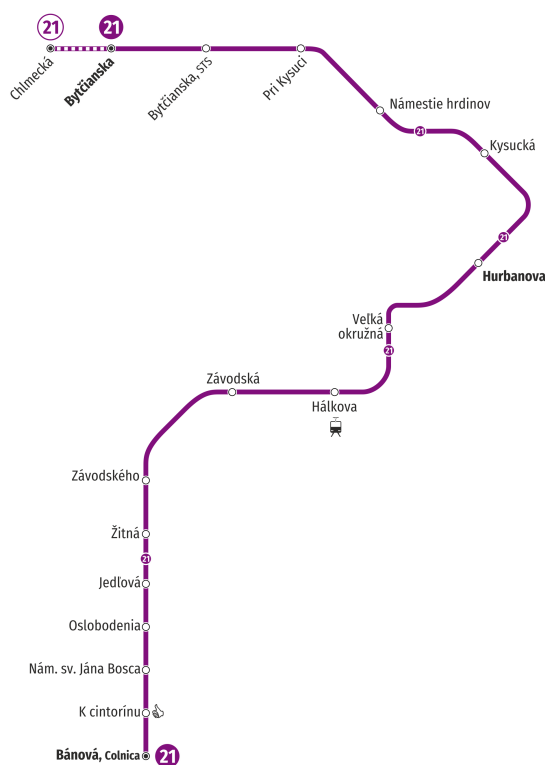
**Obrázok 2.2:** Ukážka digrafu [8].

Pri konverzii cestnej siete na digraf sú križovatky použité ako vrcholy a úseky medzi nimi ako hrany. Ak je medzi vrcholmi  $u$  a  $v$  obojsmerná cesta, tak je reprezentovaná v digrafe dvomi hranami a to  $(u, v)$  a  $(v, u)$ . V prípade jednosmernej cesty je do digrafu zavedená len jedna hrana, ktorá zodpovedá smeru.

## 2.2.2 Spoj a linka

Spoj je daný postupnosťou zastávok a časmi odchodov z nich. V cestovnom poriadku má svoj daný čas, môže mať prípadne dátumové alebo iné obmedzenia [40].

Množinu spojov, jazdiacich na rovnakej trase, očíslovaných vzostupne podľa času odchodu  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  nazveme linkou. Ďalej je linka definovaná svojou trasou. Ilustrácia linky sa nachádza na obrázku 2.3.



**Obrázok 2.3:** Ukážka linky 21 v Žiline

Linka hromadnej dopravy je základom pre orientáciu v cestovnom poriadku. Je daná postupnosťou zastávok, cez ktoré prechádza. Linky majú

nejaké označenie, v mestách obvykle číslom. Existujú výnimky, kedy sa môže trasa jednej linky odlišovať medzi jednotlivými spojmi. Môže sa jednať napríklad o vynechanie poslednej zastávky v niektorých časoch. Iným druhom zmeny je zachádzka ku škole pri skončení vyučovania a podobné zmeny. Tieto súvisia so špecifickými potrebami cestujúcich v danom čase. Pri riešení optimalizačnej úlohy budeme takéto špecifické zmeny zanedbávať, hlavne pri prvotnom návrhu riešenia úlohy.

Linka obsahuje istý počet spojov, ktoré môžeme chápať ako jednotlivé prejazdy vozidla po danej linke. Spoj má daný čas odchodu z každej zastávky na danej linke.

### 2.2.3 Servisná jazda

Vozidlo verejnej hromadnej dopravy obsluhuje obvykle viacero spojov, ktoré na seba nemusia vždy nadväzovať polohou poslednej, respektíve prvej zastávky. Prvý spoj dňa tiež nezačína vždy práve v mieste depa. Podobná situácia je aj po skončení posledného spoja. Preto musí vozidlo vykonať jazdu bez pasažierov. Tento prechod sa nazýva servisná jazda. Je to teda prejazd z depa na zastávku a naopak prejazd medzi poslednou zastávkou predošlého spoja na prvú zastávku nového spoja.

### 2.2.4 Turnus vozidla

Postupnosť spojov realizovaná jedným vozidlom a prejazdy medzi týmito spojmi musia v dopravnej sieti tvoriť uzavretý sled, ktorý začína a končí v stredisku  $s$ . Postupnosť spojov musí byť časovo prípustná. To znamená že medzi koncovým časom spoja a počiatočným časom spoja nasledujúceho musí byť aspoň taká časová rezerva, za akú je vozidlo schopné prejsť od koncového vrchola spoja k počiatočnému vrcholu spoja nasledujúceho. Takto špecifikovaný rozvrh vozidla určený postupnosťou spojov budeme nazývať turnusom vozidla [12], [30].

### 2.2.5 Stav nabitia batérie

Stav nabitia batérie, skrátene  $SOC^1$ , reprezentuje aktuálny stav nabitia batérie vozidla v percentách. Počas trvania turnusu vozidla je potrebné, aby sa tento stav držal medzi hodnotami, ktoré budú zvolené parametrami. Vozidlo začína jazdu s počiatočným stavom.  $SOC$  vozidla sa počíta v závislosti na tom, či je trolejové vedenie vybudované na aktuálnom úseku alebo nie.

---

<sup>1</sup>*State of charge* – Stav nabitia batérie

Počiatočný stav môže byť uvažovaný ako plná kapacita, prípadne náhodne generovaný alebo inak zvolený [21].

Nasledujúca funkcia slúži na výpočet rozdielu v *SOC* vozidla

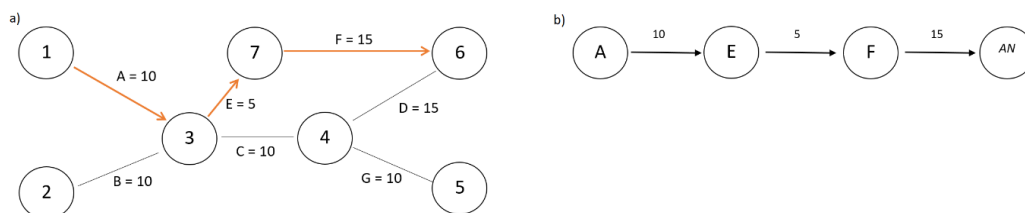
$$\Delta SOC = \frac{E_{kon} - E_{zac}}{E_{kap}},$$

kde  $E_{zac}$  a  $E_{kon}$  je stav batérie v kilowatthodinách ( $kWh^2$ ) pred a po prechode segmentom trasy a  $E_{kap}$  je kapacita batérie [60].

## 2.2.6 Digraf úsekov turnusu

Pre daný typ úlohy je nutné definovať nový druh digrafu. Jedná sa o digraf úsekov turnusu. V ňom sú vrcholmi jednotlivé zastávky v dopravnej sieti. Za úsek cesty sa považuje orientovaná hrana medzi zastávkami, križovatkami, depom, atď..., ktoré nasledujú priamo za sebou v turnuse vozidla hromadnej dopravy.

Takýto digraf je zostavený zo zoznamov úsekov pre jednotlivé turnusy. Vznikne tak orientovaná sieť, ktorá obsahuje len hrany využívané vozidlami hromadnej dopravy na presun medzi jednotlivými zastávkami, križovatkami a depami a hrany, ktoré slúžia na presun medzi linkami, ak je takýto presun potrebný. Konverzia digrafu cestnej siete na digraf úsekov turnusu sa nachádza na obrázku 2.4.

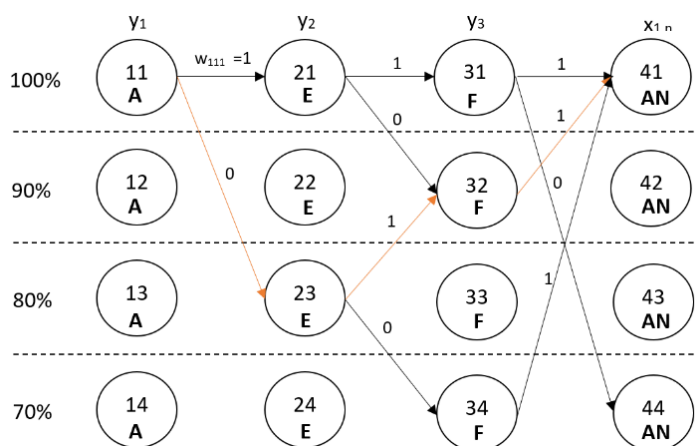


**Obrázok 2.4:** Vytváranie digrafu úsekov cesty z digrafu cestnej siete. a) Príklad digrafu cestnej siete. Linka autobusu (so zastávkami 1, 3, 7, 6) je označená oranžovou farbou. Vrcholy sú zastávky a hrany úseky. b) Digraf úsekov cesty vytvorený pre linku. Vrcholy sú segmenty trasy. AN je umelý vrchol reprezentujúci *SOC* vozidla po skončení jazdy [21]. Pre zjednodušenie v príklade neuvažujeme križovatky mimo zastávok.

<sup>2</sup>kilowatt-hour – kilowatthodina

## 2.2.7 Digraf stavu nabitia batérie

Digraf stavu nabitia batérie obsahuje všetky možnosti, ako môže vozidlo trasu prejsť z pohľadu toho, či sa batéria nabíja alebo nenabíja na jednotlivých úsekoch cesty. Na tomto digrafe vidíme aj príslušné úrovne nabitia batérie počas jazdy a výsledný stav batérie na konci turnusu. Ilustrácia *SOC* grafu sa nachádza na obrázku 2.5.



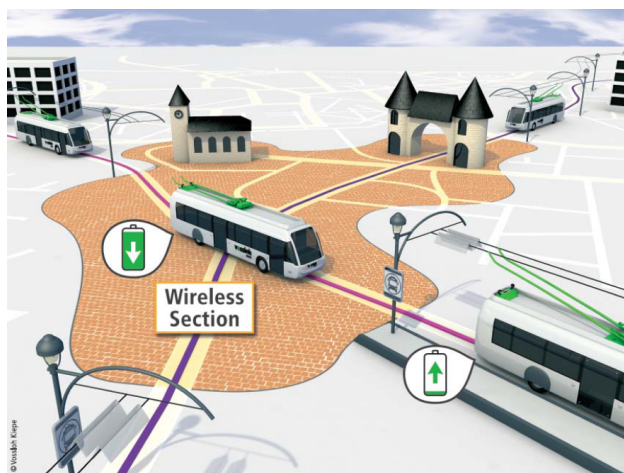
**Obrázok 2.5:** Zjednodušený príklad digrafu stavu nabitia batérie. Riadky reprezentujú jednotlivé úrovne nabitia a vrcholy sú segmenty trasy. Prechody medzi úrovňami nabitia sú značené 1, ak je vozidlo nabíjané a 0, ak nie je. [21].

Tento digraf môže byť vytvorený pre každý turnus. Zmienovaný digraf obsahuje všetky možné kombinácie *SOC* vozidla, ktoré môžu nastať pri prechode turnusom. Tieto možnosti sú vytvorené pomocou kombinácií pokrytia, respektíve nepokrytia jednotlivých segmentov trasy linky pomocou trolejového vedenia. Digraf stavu nabitia batérie obsahuje len tie možnosti, pri ktorých je vozidlo schopné trasu prekonať.

# Kapitola 3

## Analýza existujúceho stavu

V tejto kapitole sa budeme venovať analýze súčasného stavu danej problematiky. Budeme sa venovať tomu, prečo optimalizujeme sieť práve pre prevádzku parciálnych trolejbusov, ktoré využívajú nabíjanie počas jazdy (*IMC*<sup>1</sup>). Začneme popisom danej technológie a faktorov, ktoré ovplyvňujú jej nasadenie do reálnej prevádzky. Z týchto faktorov následne vyberieme tie, ktoré je nutné brať do úvahy pri vytváraní matematického modelu úlohy. Základná myšlienka tohoto systému sa nachádza na obrázku 3.1.



**Obrázok 3.1:** Náčrt základnej myšlienky parciálnych trolejbusov a *IMC* [©Vossloh Kiepe] [2].

V ďalších častiach sa budeme venovať už existujúcim spôsobom na rozmiestňovanie nabíjacej infraštruktúry pre parciálne trolejbusy, prípadne roz-

<sup>1</sup>*In motion charging* – Nabíjanie počas jazdy

miestňovaniu indukčných vedení pre osobné a nákladné vozidlá. Aj keď skúmanú problematiku autori dostupných zdrojov riešia iba čiastočne, tak môžeme ich zistenia rozšíriť a použiť pri riešení našej úlohy.

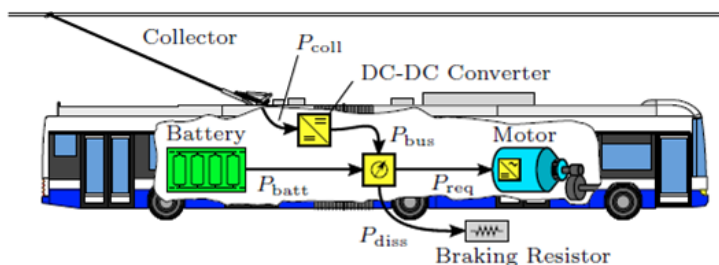
## 3.1 Dostupné technológie vozidiel

Vozidlá na elektrický pohon sa začínajú čoraz viac rozširovať. Ich zavedenie môže pomôcť ku znižovaniu spotreby neobnoviteľných zdrojov a takisto prispieva ku redukcii emisií, znečistenia ovzdušia a hluku. Je tomu tak pri osobnej, nákladnej aj hromadnej doprave. Tento trend je podporovaný mnohými krajinami, aj samotnou Európskou úniou [62].

Pri hromadnej doprave sa vo viacerých mestách na Slovensku už pomerne dlhú dobu využíva trolejbusová doprava. Pre nasadenie trolejbusov je potrebné pokryť všetky trasy súvislým vedením. Preto je možné trolejbusy nasadiť len na vyťažené linky. Pri menej vyťažených linkách boli donedávna nasadzované, takmer výlučne, autobusy na naftový pohon. V posledných rokoch ich nahrádzajú elektrobusesy.

### 3.1.1 Parciálny trolejbus

Zaujímavou alternatívou je využitie parciálnych trolejbusov. Tieto vozidlá prepájajú výhody obidvoch spomínaných druhov vozidiel na hromadnú dopravu. Parciálny trolejbus je teda vozidlo, ktoré na elektrifikovaných častiach trasy pracuje ako štandardný trolejbus. Vozidlo poháňa elektrický motor a energia je získavaná primárne z trolejového vedenia. Jeho výhodou je, že dokáže prekonať aj neelektrifikované úseky, pretože má k dispozícii prídavný zdroj energie, teda batériu. Dobíjanie batérie prebieha na elektrifikovaných úsekoch trasy za pohybu vozidla. Časť energie sa dá získať aj rekuperáciou pri brzdení [24]. Jednoduchá ilustrácia základných komponentov a kľúčových častí takéhoto vozidla na nachádza na obrázku 3.2.



Obrázok 3.2: Ilustrácia kľúčových komponentov parciálneho trolejbusu [55].

Použité batérie v parciálnom trolejbuse sú podstatne menšie ako v štandardnom elektrobuse. Táto vlastnosť zaručuje, že prípadná výmena batérie po skončení jej životnosti vyprodukuje menej nebezpečného odpadu [2], [3], [7] a [54]. Autori štúdie [7] tvrdia, že v porovnaní ekonomickej náročnosti výroby a prevádzky dopadli parciálne trolejbusy lepšie ako ostatné druhy elektrických autobusov. Autori ďalej predpokladajú, že do budúcnosti bude rozdiel v prospech tohoto druhu vozidiel ešte väčší ako v súčasnosti [7]. Toto tvrdenie potvrdzuje aj predpoklad publikovaný v prípadovej štúdii rozšírenia liniek do Laksevågu [54].

Trakčné batérie sú v tomto type vozidiel veľmi dôležitým komponentom. Ich druh a veľkosť priamo ovplyvňuje dôležité vlastnosti vozidla. Toto je nutné zohľadniť pri optimalizácii. Výhodou je, že parciálny trolejbus potrebuje dva až desaťkrát menšiu batériu v porovnaní so štandardným elektrobusedom. Hlavným parametrom batérie je jej kapacita. Veľkosť je voliteľná u mnohých výrobcov a v súčasnosti sa pohybuje od 20 *kWh* do 100 *kWh*. Inštalácia väčšej batérie zvyšuje cenu nového vozidla, jeho hmotnosť a teda znižuje užitočnosť pre cestujúcich [2], [3], [4] a [41].

Dojazd parciálneho trolejbusu na batériu sa pohybuje od desať do tridsať kilometrov v závislosti od kapacity batérie, teploty prostredia, profilu trasy, zaťaženia vozidla a ďalších faktorov [2], [3] a [54].

Životnosť trakčných batérií je limitovaná. Použité batérie sú považované za potenciálny zdroj nebezpečného odpadu. Podľa výrobcu Saft Industrial Battery Group sú ich batérie plne recyklovateľné a prevádzková teplota sa môže pohybovať od -20 až do +55 stupňov Celzia [58].

Životnosť batérií je citlivá na výber správnej nabíjacej stratégie. Autori štúdie realizovateľnosti [56] tvrdia, že pre zachovanie čo najlepšej životnosti batérie je vhodné držať *SOC* batérie v rozsahu 20% až 90%. Rýchlosť nabíjania batérie nie je lineárna. Napriek tomu, zmienenú funkciu, je možné aproximovať lineárnou funkciou. Táto aproximácia má minimálnu chybu, ak je *SOC* batérie pod 80% [49]. Z uvedených faktov vyplýva, že ak chceme zachovať optimálnu životnosť trakčnej batérie, ušetriť energiu a zjednodušiť optimalizačné výpočty, je dobre dodržiavať tieto limity. Preto by sa mal *SOC* elektrovozidla držať medzi 20% až 80% reálnej kapacity.

Základná informácia o spotrebe elektrovozidla na hromadnú dopravu sa meria na trase bez výškových rozdielov pri 18 stupňoch Celzia [14] a [61]. Za normálnych okolností sa spotreba energie pohybuje od 1 *kWh/km* do 2 *kWh/km*. Podľa viacerých autorov má rekuperácia značný vplyv na úsporu energie. Rekuperácia znamená spätné získavanie elektrickej energie brzdením pomocou elektromotoru. Potenciál úspory energie sa pohybuje od 0.3 do 0.6 *kWh/km* [55], [2] a [14]. Parciálny trolejbus má batériu dostatočne veľkú nato, aby dokázal energiu uchovávať [55].



Teplota prostredia značne ovplyvňuje spotrebu energie tohoto druhu vozidiel. Simulačná štúdia [14] sa venuje porovnaniu prevádzky pri 18 stupňoch Celzia, ako ideálneho stavu, s prevádzkou pri -17 stupňoch, ako extrémnych podmienok. Zaujímavým zistením je, že zvýšenie spotreby bolo až o 37%. Toto zvýšenie bolo spôsobené hlavne používaním kúrenia v priestore pre pasažierov a ohrevu batérií [45] a [14]. Podobný efekt spôsobí aj používanie klimatizácie.

### 3.1.2 Trolejové vedenie ako spôsob nabíjania vozidla

Náklady na vybudovanie a údržbu trolejového vedenia predstavujú značnú časť nákladov na prevádzku dopravného systému. Výhodou parciálnych trolejbusov je, že vedenie nemusí byť súvislé. Vďaka tomu je možné pokryť aj také úseky, kde by sa zavedenie klasického trolejbusu neoplatilo. Našou snahou je samozrejme minimalizácia siete vedení. Pri výstavbe vedení je potrebné brať do úvahy aj iné faktory, ako len cenu. Trolejové vedenie môže pôsobiť rušivo, napríklad v historických centrách miest. Podľa dostupných informácií je potrebné pre prevádzku tohoto druhu vozidiel pokryť približne 50% trasy vedením [2].

Pripájanie a odpájanie vozidiel zo siete sa vykonáva na zastávkach a nevyžaduje predlžovanie jazdnej doby. Tento proces je automatizovaný a vyžaduje výstavbu špeciálneho zariadenia. Ukážka takéhoto zariadenia sa nachádza na obrázku 3.3.



**Obrázok 3.3:** Parciálny trolejbus, ktorý práve používa zariadenie na pripájanie sa k trolejovému vedeniu [24]

### 3.1.3 Faktory prostredia

Profil trasy takisto ovplyvňuje prevádzku parciálnych trolejbusov, respektíve všetkých  $EV^2$  a ich spotrebu energie. Na základe výpočtov a simulácii od viacerých autorov [39] a [63] vieme, že hlavne jazda hore kopcom má výrazný efekt na spotrebu energie. Na 5% stúpaní môžeme očakávať až 3-násobné zvýšenie spotreby elektrickej energie. Túto zvýšenú spotrebu je možné riešiť napríklad prioritným pokrývaním stúpaní pomocou trolejového vedenia. Pri zjazde je možné využívať rekuperáciu, čo vedie k šetreniu energie [52].

Hustotu premávky nie je možné ovplyvniť, ale v našom prípade sa ňou nebudeme zaoberať. Ako vstupné dáta používame už existujúce linky a turnusy, ktoré majú spomalenie počas dopravnej špičky už započítané v rozvrhoch.

## 3.2 Nasadenie parciálnych trolejbusov

Parciálne trolejbusy boli nasadené na vybraných trasách vo viacerých štátoch a mestách. Boli použité napríklad pri novovzniknutých linkách a na testovacie účely. Zaujímavosťou je, že aj v meste Žilina, ktoré využívame ako dátový podklad pre testovacie úlohy, bolo zakúpených niekoľko takýchto vozidiel. Aktuálne premávajú v rámci testovacej premávky na vybraných linkách. Ukážka takéhoto vozidla v meste Žilina sa nachádza na obrázku 3.4.



**Obrázok 3.4:** Parciálny trolejbus používaný DPMŽ v Mojsí pri Žiline, kde nevedie trolejové vedenie [10]

---

<sup>2</sup>Electric Vehicle – Vozidlo na elektrický pohon

Z vykonaného prieskumu aktuálneho stavu problematiky vyplýva, že nasadenie na kompletnej cestnej sieti nebolo testované. Príbuzné výskumné práce sa týkali prevažne rozmiestňovania indukčných vedení pre osobné a nákladné autá.

### 3.2.1 Nasadenie na vybraných trasách

V Poľskom meste Gdynia boli parciálne trolejbusy úspešne nasadené na vybraných trasách. Autori z tamojšej univerzity publikovali cenné informácie na základe pozorovaní z prevádzky [2] a [3]. Články podrobne popisujú vozidlá samotné, spotrebu, ich batérie, trolejové vedenia a skúsenosti z používania týchto vozidiel. Tieto údaje sú dobrým základom pre pochopenie danej technológie a ich vlastností. Parametre, získané autormi, môžu byť použité ako vstupné pre optimalizačnú úlohu.

Máme dostupnú aj prípadovú štúdiu, ktorá sa týkala zavedenia novej trolejbusovej linky do mesta Laksevag [54]. Autori porovnávajú klasické a parciálne trolejbusy. Štúdia sa venuje výstavbe trolejového vedenia, prevádzkovým nákladom, výhodám a nevýhodám jednotlivých technológií. Nakoniec vyjadruje odporúčanie, že aj keď sú obe možnosti uskutočniteľné, odporúčajú *IMC* technológiu, teda parciálne trolejbusy. Ekonomické náklady na výstavbu nových vedení môžu byť výrazne nižšie, pretože ich použitím by nebolo nutné budovať trolejové vedenia na náročných úsekoch trasy. Autori vyjadrujú aj nádej, že táto technológia má veľký potenciál do budúcnosti [54].

### 3.2.2 Prehľad existujúcich prístupov k riešeniu úlohy návrhu nabíjacej infraštruktúry na hranách

Spôsoby optimálneho rozmiestňovania trolejových vedení pre parciálne trolejbusy považujeme za málo preskúmané. V tom nás utvrdzuje fakt, že sme nenašli dostatok vedeckých publikácií na túto tému. Jedná sa tak o novú tému, ktorá prináša nové výzvy, s ktorými sa budeme musieť vysporiadať pri riešení danej úlohy.

Podobnou úlohou je rozmiestňovanie indukčných vedení pre elektrovozidlá. Indukčné vedenia môžu využívať napríklad aj osobné autá. V tomto prípade je nabíjacie vedenie inštalované priamo do vozovky a energiu môže využívať každé vozidlo počas jazdy, ktoré je vybavené zariadením na zber energie. Pri tomto type úlohy platí, že sú vybrané úseky, ktoré sú častejšie využívané a úloha sa rieši na nich.

### 3.2.3 Umiestňovanie indukčného vedenia SOC prístup

Autori článku [60] sa venovali už spomínanému druhu úlohy optimalizácie indukčných vedení. Osobné autá na elektrický pohon, ktoré by boli schopné využívať technológiu *IMC*, majú potenciál do budúcnosti a je to cesta, ako prekonať súčasný problém elektromobilov, ktorým je malý dojazd. Zvolili si úlohu optimálneho rozmiestňovania indukčných nabíjajúcich vedení na vybraných úsekoch s obmedzeným rozpočtom. Ich snahou bolo maximalizovať počet možností, akými sa dá sieť úspešne prejsť. Ak nie je možné dokončiť trasu, snažili sa aspoň maximalizovať dojazd. Vytvorili matematický model úlohy lineárneho programovania a predstavili spôsob, ako transformovať vstupné dáta úlohy [60].

Rozhodovacia premenná  $y_s$  nadobúda hodnotu podľa toho, či aspoň jedna z trás vyžaduje pokrytie daného úseku vedením a  $x_{r,i,j}$  či je hrana  $(r, i, j)$  súčasťou  $(s - t)$  cesty v grafe cestnej siete [60].

Premenná  $w_{r,i,j}$  označuje, či je úsek  $r$  pokrytý vedením alebo nie. Ďalej nech  $r$  je počet úsekov cesty,  $m$  je počet liniek a  $n$  je počet vrcholov v *SOC* grafe. Potom  $M$  je veľká konštanta,  $R$  je konštanta rozpočtu, ktorá obmedzuje maximálne náklady na vybudovanie siete. Okrem toho platí že  $0 < \epsilon < 1$ . Množina  $B_r$  obsahuje všetky hraničné vrcholy. Množina  $F_r$  je množina nasledujúcich úsekov a  $B_r$  je množina predchádzajúcich úsekov [60].

$$\max \sum_{r=1}^m \sum_{(u,t) \in B_r} w_{ruu} \cdot x_{rut} \quad (3.1)$$

Za podmienok:

$$\sum_{s=1}^n c_s \cdot y_s \leq R \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in F_r(i)} x_{rij} - \sum_{j \in B_r(i)} x_{rji} = \begin{cases} 1, & \text{ak } (r, i) = (r, s) \\ -1, & \text{ak } (r, i) = (r, t) \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad r = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

$$y_s \leq \sum_{r=1}^m \sum_{u \in U_s} \sum_{v \in F_{r,n}} w_{ruv} \cdot x_{ruv} \quad s = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$M \cdot y_s \geq \sum_{r=1}^m \sum_{u \in U_s} \sum_{v \in F_{r,n}} w_{ruv} \cdot x_{ruv} - \epsilon \quad s = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$y_s \in \{0, 1\} \quad for \quad s = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

$$x_{rut} \in \{0, 1\} \quad for \quad r = 1, \dots, m, \quad (u, t) \in B_r \quad (3.7)$$

Účelová funkcia 3.1 maximalizuje počet úsekov, ktoré sú pokryté indukčným vedením. Podmienka 3.2 zabezpečuje, že nebude prekročený rozpočet. Podmienka 3.3 zabezpečuje vytvorenie  $(s - t)$  cesty. Podmienky 3.4 a 3.5 sú väzobné a zabezpečujú inštaláciu vedenia, ak je to potrebné [60].

Keďže je úloha považovaná za NP-ťažkú, autori zvolili heuristický prístup pre väčšie úlohy. Autori vypracovali porovnanie exaktného a heuristického prístupu pre malé úlohy. Z heuristických prístupov boli použité *BWC*<sup>3</sup> heuristika a *EVC*<sup>4</sup> heuristika [60].

Heuristika *BWC* je používaná na riešenie grafových úloh. *BWC* využíva ohodnocovanie vrcholov grafu, na základe ktorého je možné ich následné zoradenie [28]. Nech  $g_{ij}$  je počet najkratších trás z vrchola  $i$  do  $j$  a  $g_{ikj}$  je počet najkratších trás z vrchola  $i$  do  $j$ , ktoré prechádzajú vrcholom  $k$ , potom je *BWC* vrcholu  $k$  definované ako [60]:

$$\sum_i \sum_j \frac{g_{ikj}}{g_{ij}}, \quad kde \quad i \neq j \neq k.$$

*EVC* je spôsob výpočtu stupňa vrchola a zároveň aj jeho susedných vrcholov. Hodnota *EVC* vrchola je tým vyššia, čím je vyšší počet dôležitých vrcholov, s ktorými je daný vrchol prepojený. Na výpočet sa používa matica susednosti grafu [47]. Odhad ohodnotenia je takisto možné získať heuristickým prístupom, napríklad pažravou metódou [57].

Autori využili ako testovacie dáta z reálneho prostredia, konkrétne časti New Yorku sietí. Tieto úlohy už neboli riešiteľné exaktne. Z heuristík vychádzala ako úspešnejšia *BWC* heuristika [60].

---

<sup>3</sup>*Betweenness Centrality* – Medzilahlá centralita vektora

<sup>4</sup>*Eigenvector Centrality* – Centrálnosť vlastného vektora

### 3.2.4 Ďalšie prístupy

Autori článku [27] sa rovnako venovali optimálnemu rozmiestňovaniu indukčných vedení pre osobnú dopravu. Ako prvý definovali model, ktorý pomáhal odhadovať tok dopravy, na základe čoho bolo možné vybrať úseky, ktoré by bolo vhodné pokryť indukčným vedením. Zostavili aj optimalizačný model. Oba modely boli riešené na testovacích dátach a potvrdené numerickými experimentami [27].

Autori článku vyjadrujú určité vstupné predpoklady. Jedná sa o úlohu, ktorá pokrýva potreby vodičov osobných vozidiel. Predpokladajú, že vodič zvolí spôsob jazdy a plán nabíjania tak, aby trasu úspešne dokončil. To, či vozidlo využije dostupné indukčné vedenie a v akej miere, je teda na vodičovi. Ďalej predpokladajú, že všetky vozidlá sú rovnakého druhu, majú rovnakú batériu a vlastnosti [27].

Vodič môže ovplyvňovať výber trasy a rýchlosť, akou sa vozidlo pohybuje. Lineárny model, ktorý sa venoval odhadu toku dopravy a rozhodnutí, pomohol ukázať, že vodiči sú ochotní spomaliť za účelom dlhšieho pobytu na elektrifikovanej trase, čím získajú viac energie pre batériu [27].

Pri optimalizácii umiestnenia nabíjajúcich úsekov úspešne využili algoritmus pracujúci s aktívnymi množinami. Tento algoritmus sa ukázal ako efektívny na daný typ úlohy [27].

Algoritmus začína tým, že zvolíme riešenie, ktoré je dostatočne vhodné (napríklad riešením LP relaxácie úlohy). Následne sa určia tie podmienky, ktoré majú najväčší vplyv na výsledné riešenie. Tým sa obmedzí prehľadávaný priestor prípustných riešení. Tento prístup teda redukuje komplexnosť problému [50]. Model, ktorý autori predstavili, nie je použiteľný pri riešení našej úlohy. Za prínos k našej téme považujeme čiastočnú zhodu základných definícií, prístupu k práci so *SOC* vozidla a istú podobnosť vstupných dát.

## 3.3 Lokačná úloha

Často sa zaoberáme riešením úlohy návrhu alebo riadenia sieťových systémov, ako sú napríklad systémy záchranné prípadne distribučné systémy. V takomto prípade sa stretávame s kapacitne neobmedzenou, prípadne obmedzenou lokačnou úlohou [34]. Pri riešení štandardnej lokačnej úlohy obvykle vyberáme umiestnenie pre centrá v uzloch siete. Môže sa jednať o úlohy zamerané na umiestňovanie obchodov, skladov, staníc, nemocníc a podobne. Kapacita stredísk, časy odjazdu a podobne sa zapisujú ako podmienky modelu. Účelová funkcia obvykle hovorí o minimalizácii nákladov na vybudovanie stredísk, prípadne o súčte fixných a prevádzkových nákladov [33], [18].

Uvažujme kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu s množinou  $I$  možných umiestnení obslužných stredísk. Nech  $J$  je množina zákazníkov, ktorých požiadavky majú byť uspokojované z umiestnených zariadení. Predpokladáme, že pre každé umiestnenie  $i \in I$  je daný pevný poplatok  $f_i$  a že pre každú dvojicu  $(i, j)$ , kde  $i \in I$  a  $j \in J$ , sú známe náklady  $c_{ij}$  na uspokojenie požiadavky zákazníka  $j$  z miesta  $i$ . Zavedme 0 - 1 premennú  $y_i$  pre každé možné miesto  $i \in I$ , aby sme opísali rozhodnutie o umiestnení ( $y_i = 1$ ) zariadenia v tomto mieste alebo opačné rozhodnutie ( $y_i = 0$ ). Označme  $x_{ij}$  časť  $j$  - tej požiadavky uspokojovanej z miesta  $i$ . Potom s využitím vyššie spomenutých konštánt  $f_i$  a  $c_{ij}$  môžeme sformulovať nasledujúci model [34]:

$$\min f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i \cdot y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (3.8)$$

Za podmienok:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pre } j \in J \quad (3.9)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pre } i \in I \text{ a } j \in J \quad (3.10)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{pre } i \in I \text{ a } j \in J \quad (3.11)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \text{pre } i \in I \quad (3.12)$$

V modeli podmienky 3.9 zabezpečujú, že každý zákazník bude obslužený. Podmienky 3.10 si vynúti umiestnenie zariadenia na miesto  $i$  kedykoľvek je ľubovoľná časť požiadavky ľubovoľného zákazníka uspokojovaná z tohto miesta [34].

# Kapitola 4

## Analýza metód a nástrojov na riešenie problému

### 4.1 Nástroje na exaktné riešenie úloh lineárneho programovania

Využívanie nástrojov na exaktné riešenie úloh je dôležitou súčasťou riešenia optimalizačných úloh. S ich pomocou vieme s určitostou určiť optimálne riešenie danej úlohy. Mnohé úlohy sú dobre riešiteľné pomocou exaktného prístupu.

Ďalšia kategória úloh je riešiteľná len pre úlohy malého rozsahu. Obvykle tento rozsah nie je dostatočný na vyriešenie úlohy z reálneho sveta. V takomto prípade musíme nájsť rozsah riešiteľnosti, aby sme vedeli určiť, aké veľké úlohy vieme riešiť exaktne. Toto obmedzenie je obvykle časové, ale môže sa prejaviť aj nedostatok operačnej pamäte. Ak je potrebné riešiť väčšie úlohy, tak je nutné hľadať iné prístupy, napríklad približné spôsoby riešenia.

#### 4.1.1 Simplexová metóda

Pri riešení neceločíselných lineárnych optimalizačných úloh je simplexová metóda základným algoritmom a je vôbec jedným z najpoužívanějších. Uvádza-me ju z toho dôvodu, že pri riešení celočíselných úloh, zvolený  $IP^1$  solver Xpress IVE ju používa vo fáze predspracovania riešenej úlohy.

Jedná sa o iteračnú metódu, teda metódu, ktorá pracuje v určitých krokoch. Tieto kroky postupujú od východzieho riešenia optimalizačnej úlohy

---

<sup>1</sup>*Integer programming* – Celočíselné programovanie



k ďalšiemu riešeniu s lepšou hodnotou účelovej funkcie. Vyšetrujú sa vlastne vrcholy množiny prípustných riešení a to tak, že s vykonaním každej iterácie sa algoritmus približuje optimálnemu riešeniu [59].

Základný princíp simplexovej metódy vyzerá nasledovne:

**Krok 1.** Zvolíme východziu prípustnú bázu a transformujeme sústavu obmedzujúcich podmienok do kanonického tvaru a tým vznikne východzie prípustné riešenie. Potom vytvoríme simplexovú tabuľku.

**Krok 2.** Urobíme test optima podľa simplexového kritéria. V prípade, že sme našli optimum, prejdeme na krok 4a. Inak pokračujeme krokom 3 a prejdeme k ďalšiemu základnému riešeniu.

**Krok 3.** Ak neexistuje vektor s aspoň jedným kladným prvkom, ktorému prináleží prvok v poslednom riadku simplexovej tabuľky, ktorý nespĺňa simplexové kritérium, tak prejdeme ku kroku 4b. Ak taký vektor existuje, zvolíme ľubovoľný z nich a označíme ho ako kľúčový stĺpec. Nájdeme kľúčový prvok a podľa neho bude nutné transformovať tabuľku tak, aby sme získali nové základné riešenie. Potom pokračujeme opäť krokom 2.

**Krok 4a.** Ak simplexová tabuľka dáva optimálne riešenie, algoritmus končí.

**Krok 4b.** Účelová funkcia je na množine prípustných riešení zdola neobmedzená a tým pádom optimalizačná úloha nemá prípustné riešenie [59].

### 4.1.2 Duálna simplexová metóda

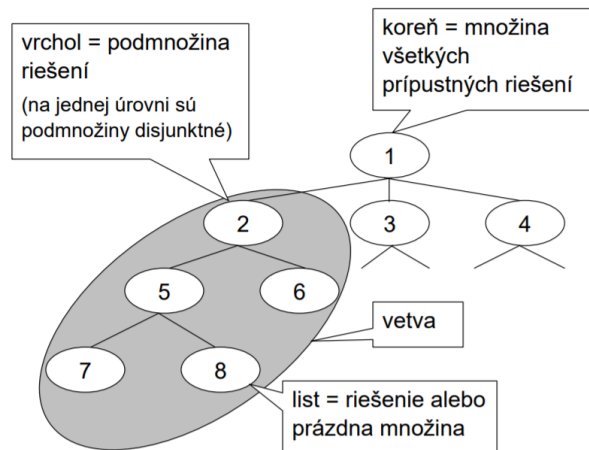
Princíp duálnej simplexovej metódy je podobný postupu primárnej v tom, že prehľadáva susedné bázické riešenia. Tieto bázické riešenia sú ale neprípustné okrem výsledného optimálneho riešenia. Na rozdiel od primárnej simplexovej metódy ale spĺňajú to, že redukované ceny všetkých spracovávaných bázických riešení vyhovujú podmienkam optimálnosti. To znamená, že v prípade maximalizácie sa prechody v duálnej metóde uskutočňujú len medzi susednými bázickými riešeniami, ktorých redukované ceny sú nekladné a naopak, pri minimalizácii sa prechody uskutočňujú medzi bázickými riešeniami, ktorých redukované ceny sú nezáporné. V primárnej simplexovej metóde podmienky optimálnosti spĺňa len výsledné riešenie [33].

Pojem susedné bázické riešenie je rovnaký v primárnej aj duálnej simplexovej metóde. Za susedné bázické riešenia sa považujú tie, ktoré sa líšia práve

v jednej bázeckej premennej, inými slovami v jednom bázeckom stĺpci. V prípade duálnej simplexovej metódy sa prechod uskutočňuje medzi aktuálnym bázeckým riešením a susedným bázeckým riešením, ktorého hodnota účelovej funkcie je horšia ako hodnota aktuálneho riešenia. Proces prechodov končí buď nájdením prípustného bázeckého riešenia, ktoré je súčasne optimálnym riešením, alebo zistením, že žiadne prípustné riešenie neexistuje [33].

### 4.1.3 Metóda vetiev a hraníc

Metóda vetiev a hraníc slúži na riešenie úloh celočíselného lineárneho programovania. Algoritmus postupne prehľadáva strom riešení podľa špecifického postupu [37]. Ukážka stromu riešení sa nachádza na obrázku 4.1.



**Obrázok 4.1:** Ukážka stromu riešení, ktorý je možné spracovať pomocou metódy vetiev a hraníc [37].

**Krok 1.** Je preskúmaný koreň stromu a následne vložený do zoznamu.

**Krok 2.** Pokiaľ existuje nepreskúmaný následník prvého vrcholu v zozname, tak sa opakuje preskúmanie následníka, teda výpočet dolného odhadu a jeho následné vloženie do zoznamu.

**Krok 3.** Je zvolený prvý vrchol zo zoznamu.

**Krok 4.** Ak je zoznam prázdny, tak algoritmus končí. Inak pokračuje krokom 2 [37].

Poznáme dva prístupy prehľadávania stromu riešení a to úplné a obmedzené. Pri úplnom prehľadávaní sú kontrolované všetky riešenia a vybrané to najlepšie z nich. Pri obmedzenom prehľadávaní sú vynechané tie vetvy stromu, pri ktorých sa dá dokázať, že v nich nie je optimálne riešenie. Metóda vetiev a hraníc vykonáva obmedzené prehľadávanie [37].

Na vylúčenie nejakej vetvy stromu riešení potrebujeme poznať dve hodnoty. Prvou je horný odhad hodnoty účelovej funkcie, teda hodnotu účelovej funkcie akéhokoľvek prípustného riešenia. Druhou je dolný odhad hodnoty účelovej funkcie riešení z danej vetvy. Vetva stromu riešení, ktorá má koreň v následníkovi, je vylúčená z ďalšieho prehľadávania, ak je dolný odhad väčší alebo rovný ako horný odhad [37].

Dolný odhad sa získava riešením zjednodušenej úlohy, ktorá vznikne vynechaním nejakých podmienok pôvodnej úlohy. Množina prípustných riešení pôvodnej úlohy je podmnožinou množiny riešení zjednodušenej úlohy, preto optimálne riešenie zjednodušenej úlohy má hodnotu účelovej funkcie menšiu alebo rovnú ako optimálne riešenie pôvodnej úlohy [37].

Stratégia prehľadávania určuje poradie, v ktorom budú vrcholy spracované. Prvým spôsobom je prehľadávanie do hĺbky. V tomto prípade je prvý vrchol v zozname vložený ako posledný. Výhodou sú malé nároky na operačnú pamäť. Ďalšou možnosťou je usmernené prehľadávanie, teda prvý je vrchol s najvyššou prioritou. Pri usmernenom prehľadávaní je možnosť, že optimálne riešenie nájdeme rýchlejšie [37].

#### 4.1.4 Metóda generovania stĺpcov

Vo všeobecnosti je metóda generovania stĺpcov použiteľná na také úlohy, kde majú jednotlivé stĺpce pridružené k lineárnemu modelu rovnakú štruktúru. Navyiac riešená úloha musí byť formulovaná takým spôsobom, že každé pridanie stĺpca modelu zväčší množinu prípustných riešení. Potom sa môže nachádzať vo zväčšenej množine lepšie riešenie, než v predošlej. Následne musí byť vytvorená metóda, ktorá umožní spočítať úsporu, ktorú je možné dosiahnuť pridaním stĺpca, alebo zistiť, že zlepšenie nenastane [36].

Základný princíp metódy generovania stĺpcov vyzerá nasledovne:

**Krok 1.** Je vyriešená LP-relaxácia pôvodnej úlohy. LP-relaxácia znamená, že sú vynechané podmienky celočíselnosti.

**Krok 2.** Pomocou optimálneho riešenia duálnej úlohy je sformulovaná úloha nájdenia zlepšujúceho stĺpca.

**Krok 3.** Je riešená úloha nájdenia najlepšieho zlepšujúceho stĺpca.

**Krok 4.** Ak zlepšujúci stĺpec neexistuje, algoritmus končí. Inak je tento stĺpec pridaný k sústave a pre rozšírenú sústavu sa opakuje tento postup.

**Krok 5.** Rozšírená úloha je nakoniec vyriešená celočíselne [35].

#### 4.1.5 Erlenkotterov prístup ku kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohe

Erlenkotterov prístup je exaktným prístupom na riešenie kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy. Tento prístup je založený na metóde vetiev a hraníc bol publikovaný pod názvom DualLoc [11]. Modifikáciou tohto prístupu bola vytvorená na Katedre dopravných sietí Fakulty riadenia a informatiky verzia BBDual [32]. Tento prístup vychádza z teórie duality [29], z ktorej vyplýva, že duálny model úlohy môžeme definovať pre každú lineárnu úlohu matematického programovania bez celočíselných premenných [6].

##### **Krok 0. Inicializácia**

Je inicializované doteraz najlepšie nájdené riešenie a horná hranica optimálneho riešenia. Určí sa množina všetkých prípustných riešení, teda koreň stromu riešenia. Táto množina je reprezentovaná východiskovým modelom úlohy skúmanej vetvy. Následne je vyprázdnený zoznam fixovaných premenných [32].

##### **Krok 1.**

Je vypočítaná dolná hranica hodnôt prípustných riešení v skúmanej vetve. Aktualizuje sa doteraz najlepšie nájdené riešenie a horná hranica optimálneho riešenia. Ak je dolná hranica vetvy menšia alebo rovná hornej hranici optimálneho riešenia, algoritmus pokračuje krokom 2, inak prechádza na krok 3 [32].

##### **Krok 2. Vetvenie**

Na základe získaných výsledkov pri výpočte dolnej hranice je vybraná premenná  $y_i$  pre vetvenie, fixuje sa na hodnotu 1. Je uložená do zásobníka a zodpovedajúcim spôsobom upravený model súčasnej úlohy. Následne je určená množina prípustných riešení, reprezentovaná súčasným modelom úlohy za skúmanú vetvu a algoritmus pokračuje krokom 1 [32].

##### **Krok 3. Návrat**

Ak je zásobník prázdny, algoritmus končí, inak je zo zásobníka vybraná

naposledy fixovaná premenná  $y_i$  a ďalej postupuje podľa hodnoty, na ktorej bola fixovaná.

Ak platí že  $y_i = 1$ , algoritmus fixuje premennú  $y_i$  na hodnotu 0, uloží ju do zásobníka a upraví príslušným spôsobom model súčasnej úlohy. Je určená množina prípustných riešení reprezentovaná súčasným modelom úlohy skúmanej vetvy a pokračuje krokom 1.

Ak platí že  $y_i = 0$  (v tomto prípade boli pre premennú  $y_i$  preskúmané obe možnosti), je premenná  $y_i$  zaradená medzi nefixované premenné, model súčasnej úlohy príslušne upravený. Je určená množina prípustných riešení, reprezentovaná súčasným modelom úlohy za skúmanú vetvu a algoritmus pokračuje krokom 2 [32].

## 4.2 Nástroje na približné riešenie optimalizačných úloh

Pri úlohách diskkrétnej optimalizácie sa približné metódy využívajú v prípade, že problém daného rozsahu nie je možné riešiť exaktne v konečnom čase. Jedná sa napríklad o NP-ťažké kombinatorické úlohy. Medzi kombinatorické úlohy radíme tie, kde v konečnej množine riešení hľadáme optimálne riešenie, pričom môžeme využiť preskúmanie každého riešenia, ktorých počet je možné vyjadriť kombinatorickým spôsobom [33].

Dobрым príkladom je úloha o p-mediáne, ktorá je ťažko riešiteľná exaktne od určitého rozsahu. Z našich skúseností vyplýva, že úlohu je možné vyriešiť exaktne pre jednotlivé kraje Slovenska, ale nie pre celú krajinu. Pre riešenie takejto úlohy sa dajú využiť prosté minimalizačné heuristiky. Pri potrebe dosahovania lepších výsledkov volíme využitie metaheuristik [17].

### 4.2.1 Heuristiky

Heuristické metódy slúžia na nájdenie dobrého prípustného riešenia úlohy. Využívajú sa v prípade, ak sa jedná o úlohu, ktorú nie je možné riešiť pomocou exaktných metód. V niektorých prípadoch nevieme určiť o koľko sa nájdené riešenie líši od optimálneho, lebo ho nepoznáme. Pri prehľadávaní časti priestoru riešení využívajú vlastnosti kritéria optimality a dokážu v krátkom čase nájsť dobré riešenie danej úlohy [33]. Ich nevýhodou je to, že pri prehľadávaní okolia riešenia môžu sklúzniť do lokálneho extrému a tým pádom nie je zaručené nájdenie optimálneho riešenia.

Heuristiky rozdeľujeme do dvoch kategórií, podľa spôsobu, akým pracujú. Poznáme primárne a duálne heuristiky [33]. Využívaný druh si môžeme zvoliť

podľa typu úlohy prípadne dostupnosti vstupného riešenia.

Primárna heuristika vychádza z určitého prípustného riešenia a dbá na to, aby pri prechode k inému riešeniu neporušila prípustnosť riešenia. Končí v prípade, ak získame prípustné riešenie, ktoré nie je možné ďalej zlepšiť z hľadiska lokálneho kritéria optimality bez toho, aby sme porušili prípustnosť riešenia [33].

Duálna heuristika pracuje na odlišnom princípe. V tomto prípade začína z neprípustného východiskového riešenia s lepšou hodnotou účelovej funkcie, ako by mohlo mať optimálne riešenie. Heuristika potom postupnými krokmi upravuje dané riešenie tak, aby sa zmenšila miera neprípustnosti riešenia a aby sa pritom riešenie zhoršilo čo najmenej z hľadiska optimality. Práca algoritmu je ukončená, ak bolo dosiahnuté prípustné riešenie, alebo v prípade, že ďalšími zmenami nie je možné zmenšiť mieru neprípustnosti [33].

Zvýšiť šancu na priblíženie sa k optimálnemu riešeniu môžeme tým, že danú heuristiku použijeme opakovane, vždy s iným východiskovým riešením. Môžeme teda kombinovať primárnu aj duálnu heuristiku a to tak, že riešenie získané duálnou heuristikou sa stane vstupným riešením pre heuristiku primárnu. Druhá z heuristík môže, ale nutne nemusí, riešenie zlepšiť [33].

Za globálne kritérium považujeme hodnotu účelovej funkcie. Lokálne kritérium vyjadruje iba výhodnosť vykonania danej operácie. Pri heuristickom prístupe teda hľadáme riešenie spĺňajúce globálne kritérium pomocou lokálneho kritéria [33].

Vkladacie heuristiky sú založené na vkladaní alebo odstraňovaní objektov riešenia. Pričom primárna vkladacia heuristika pracuje tak, že začína s prázdny m riešením a postupne vkladá objekty z množiny nezarađených objektov podľa lokálneho kritéria optimality. Končí v prípade, že už kapacita neumožňuje vloženie ďalšieho objektu. Duálna vkladacia heuristika začína v stave, že sú v riešení vložené všetky prvky. Postupne odstraňuje prvky z riešenia tak, aby vzniklo prípustné riešenie. Po jeho nájdení končí [33].

Výmennou heuristikou môžeme zlepšiť riešenie, ale nutne nemusíme a to ani v prípade, že existuje prípustné riešenie s lepšou hodnotou globálneho optimalizačného kritéria. Pri prostej primárnej výmennej heuristike pracujeme iba s prípustnými riešeniami. Vo všeobecnosti je výmenná heuristika založená na výmene zaradených prvkov v riešení s tými, ktoré v ňom zaradené nie sú. V prípade niektorých úloh, ktorých riešenie je dané poradím prvkov v riešení, môže výmenná heuristika meniť aj poradie zaradených prvkov v riešení [33].

Výmeny môžu prebiehať prístupom prvý vhodný, kedy sa vykoná prvá nájdená prípustná a zároveň vhodná výmena z okolia. Prípadne stratégiou najlepší vhodný, kedy sa z okolia riešenia vykoná najlepší prípustná a zároveň vhodná výmena [33].

## 4.2.2 Kernel Search

Heuristika Kernel Search môže byť využitá pre riešenie mnohých úloh lineárneho programovania. Základná myšlienka heuristiky spočíva v identifikovaní podmnožín rozhodovacích premenných a redukcií problému tak, aby obsahoval len jadro (podmnožina premenných) a korešpondujúcich podmienok. Výsledný redukovaný problém je riešený optimálne vždy, keď je to možné za použitia *IP* solvera [25], [26].

Počiatkové jadro pozostáva z binárnych premenných, ktoré sú identifikované pri riešení  $LP^2$  relaxácie originálneho modelu úlohy. Tieto vybrané premenné majú vysokú pravdepodobnosť, že budú nadobúdať hodnotu 1 v optimálnom riešení. Preto sú súčasťou jadra. Ostatné premenné sú zoradené vzostupne na základe ich redukovanej ceny a rozdelené do skupín [25], [26]. Počet vytvorených skupín je vypočítaný pomocou vzťahu:

$$N_b = \frac{n - p}{l}.$$

Platí, že  $n$  je počet všetkých binárnych premenných,  $p$  je počet premenných v počiatkovom jadre a  $l$  udáva počet premenných v skupine. Počiatkové prípustné riešenie je vypočítané za použitia originálneho lineárneho problému iba s využitím premenných z jadra. Nasledujúca zlepšujúca fáza pozostáva z cyklu, ktorý opakuje dva hlavné kroky. Prvým krokom je riešenie obmedzenej lineárnej úlohy, ktorá obsahuje rozhodovacie premenné z jadra a jednej skupiny. Potom je jadro upravené takým spôsobom, že nové, perspektívne premenné sú pridané a neperspektívne sú odobraté z jadra. Premenná je považovaná za neperspektívnu, ak nadobúda hodnotu 0, pri zvolenom počte opakovaní riešenia obmedzenej úlohy. Algoritmus končí, ak boli preskúmané všetky skupiny premenných [25], [26]. Základná schéma algoritmu vyzerá nasledovne [38]:

### Inicializácia

1. Vyríš LP relaxáciu úlohy celočíselného programovania.
2. Vytvor počiatkové jadro  $K$  a postupnosť skupín  $B_k$  kde  $k = 1, \dots, N_b$  obsahujúce premenné, ktoré sa nenachádzajú v jadre.
3. Vyríš úlohu ( $K$ ).

### Zlepšovanie

4.  $k = 1$
  5. **while**  $k \leq N_b$  **do**  
Rieš úlohu ( $K \cup B_k$ )  
Skontroluj riešenie a uprav jadro  $K$ .  
 $k = k + 1$
- end do**

---

<sup>2</sup>*Linear programming* – Lineárne programovanie

### 4.2.3 Metaheuristiky

Metaheuristika je približný prístup slúžiaci na nájdenie dobrého riešenia optimalizačného problému, ktorý má na rozdiel od prostých heuristík, mechanizmy na to, aby opustil lokálne minimum. Spoločným znakom metaheuristík je, že predpokladajú málo o danom probléme, napriek tomu je metaheuristika schopná nájsť akceptovateľné riešenie. Využívajú rozmanité prístupy k problému. Častým je inšpirácia pre základnú myšlienku prebratá z nejakého prírodného javu alebo procesu (napríklad genetické algoritmy sú inšpirované prirodzeným vývinom populácie). Mnohé metaheuristiky prehľadávajú priestor prípustných riešení spôsobom, ktorý vo veľkej miere využíva prvok náhody. Často sa preto zaraďujú k stochastickým optimalizačným algoritmom [46].

V metaheuristikách sú využívané dva protichodné princípy a to intenzifikácia a princíp diverzifikácie. Princíp intenzifikácie znamená sústrediť sa na jedno dobré riešenie a jemnými úpravami ho zlepšovať, teda prehľadávať stavový priestor v čo najbližšom okolí riešenia. Zameriava sa pri ňom pozornosť na také oblasti stavového priestoru, ktoré sa zdajú byť slubné. Slubné oblasti sa určujú na základe už nájdených dobrých riešení. Na druhej strane, princíp diverzifikácie znamená snahu preskúmať čo najväčšie množstvo rôznych riešení. Teda v priestore všetkých prípustných riešení prehľadávame zatiaľ nepreskúmané oblasti [46].

### 4.2.4 Simulated Annealing

Simulated Annealing alebo po slovensky simulované chladenie, je metaheuristika založená na reálnom deji. Vychádza zo spôsobu spracovania kovov, kde sa kov zahriaty na určitú teplotu postupne ochladzuje, čím nadobúda stabilnú teplotu[46].

Metaheuristika Simulated Annealing patrí do kategórie metaheuristík s prehľadávaním založeným na jednom riešení. Postupne prehľadáva riešenie  $O(x)$  a pokiaľ nájde vhodný prechod, tak ho vykoná. Ak prechod nie je vhodný, to znamená  $f(x') > f(x)$ , prechod nie je zamietnutý, ale je o jeho realizácii rozhodnuté pomocou náhodného experimentu s pravdepodobnosťou  $p(x', x, T)$  v prospech prechodu. Pravdepodobnosť je tým menšia, čím je zhoršenie účelovej funkcie väčšie. Metóda eviduje a aktualizuje doposiaľ najlepšie nájdené riešenie [31].

Pravdepodobnosť prechodu vypočítame nasledovne:

$$p(x', x, T) = e^{-(f(x')-f(x))/T}.$$

Kde parameter  $T > 0$  sa nazýva teplota a je nastavený na  $T^{max}$  a po



$q$  preskúmaných prechodoch je znížený podľa  $T = T/(1 + \beta T)$  pre koeficient  $\beta > 0$ . Ak nie je behom  $u$  preskúmaných prechodov zmenené doposiaľ najlepšie nájdené riešenie, algoritmus končí. Proces je ďalej možné rozšíriť o zahrievanie [31].

## 4.2.5 Genetický algoritmus

$GA^3$  sa stal populárnym pri riešení ťažkých kombinatorických optimalizačných problémov. Hlavná myšlienka je prebratá z teórie evolúcie. V prírode sa striedajú jednotlivé generácie živočíchov a krížením vznikajú nové jedince a druhy. Algoritmus tento proces simuluje pri prehľadávaní množiny prípustných riešení optimalizačných problémov [53].

Genetický algoritmus je vhodný na využitie pri úlohách, ktorých prípustné riešenie je možné popísať vektorom  $y$  s 0 - 1 zložkami. Vektor  $y$  je chromozóm a sú na ňom definované operácie mutácie a kríženia. Mutácia je zmena hodnoty niektorej zložky génu s istou pravdepodobnosťou. Kríženie je proces tvorby dvoch potomkov z dvoch rodičovských chromozómov [31].

$GA$  pracuje s množinou aktuálnych riešení, ktorá sa nazýva populácia. Práca  $GA$  začína vytvorením počiatočnej populácie a aktualizáciou doposiaľ najlepšieho nájdeného riešenia. Potom sú chromozómy na základe výhodnostných koeficientov, nazývaných fitness, párované a krížené. Na nových jedincov sa aplikuje mutácia. Nová populácia je redukovaná selekciou na pevne zvolený počet jedincov [31].

Genetický algoritmus môže byť rozšírený o ďalšie prístupy alebo kroky. Častou modifikáciou je zavedenie elitnej množiny. Časť populácie sa vyčlení pre najlepších jedincov. Títo sa potom automaticky presúvajú do novovzniknutej populácie. Môžu byť nadradení len v prípade, že krížením a mutáciami vznikne jedinec, ktorý bude lepší, ako niektorý v elitnej množine.

Základný genetický algoritmus môžeme popísať nasledujúcimi krokmi:

**Krok 0. Inicializácia** Inicializuje sa doposiaľ najlepšie nájdené riešenie najlepším riešením  $y^k$  zo vstupnej populácie  $Y = y^1, y^2, \dots, y^m$ . Následne  $HH = f(y^k)$  a  $t = 0$ .

**Krok 1.** Ak je  $t = n$  tak algoritmus končí, inak sú jedince  $y^k$  usporiadané zo súčasnej populácie  $Y$  vzostupne podľa hodnôt  $f(y^k)$  do postupnosti  $y^{k(1)}, y^{k(2)}, \dots, y^{k(m)}$  a definovaný počet  $m$  jedincov novej populácie ako  $m = 0$ . Aktualizuje sa doposiaľ nájdené riešenie.

---

<sup>3</sup>*Genetic Algorithm* – Genetický algoritmus

**Krok 2. Selekcia rodičov** V cykle s pravdepodobnosťou  $p(r)$  úmernou hodnotám  $f(y^k)$  je vybraný prvý a druhý z hľadanej dvojice rodičov  $y^{k(r)}$  a  $y^{k(s)}$ .

**Krok 3. Kríženie** Je vygenerované číslo  $p \in \{1, \dots, m\}$  ako hodnota diskretnej náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti. Následne sa vykoná kríženie  $y^{k(r)}$  a  $y^{k(s)}$  pričom vzniknú dva potomkovia  $y^r$  a  $y^s$ .

**Krok 4. Mutácia** Postupne pre potomkov  $y^r$  a  $y^s$  sa s danou pravdepodobnosťou rozhodne, či sa bude vykonávať mutácia. Ak áno, tak sú vygenerované parametre mutácie a mutácia sa vykoná.

**Krok 5. Selekcia do populácie** Z potomkov  $y^r$  a  $y^s$  sa vyberie ten, ktorý má menšiu hodnotu účelovej funkcie a zaradí sa ako  $m + 1$  jedinec do novej populácie  $Y$  a ak je hodnota menšia ako  $HH$  aktualizuje sa doposiaľ najlepšie nájdené riešenie, hodnota  $HH$  a  $t = 0$ . Následne  $\underline{m} = \underline{m} + 1$ .

**Krok 6.** Ak je  $\underline{m} < m$ , tak nová populácia ešte nie je úplná a algoritmus pokračuje krokom 2. Inak bola vytvorená populácia  $Y$  a následne je definovaná súčasná populácia  $Y = \underline{Y}$  a  $t = t + 1$  a algoritmus pokračuje krokom 1 [31].

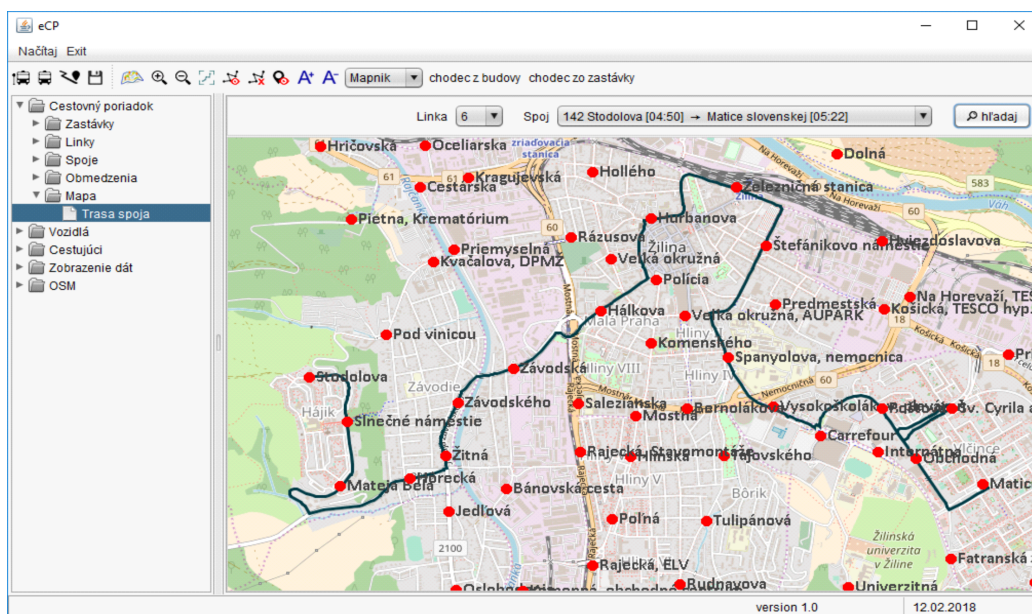
### 4.3 Simulačné nástroje na overenie riešenia

V prípade úspešného vyriešenia optimalizačnej úlohy je vhodné výsledky validovať napríklad pomocou simulačného modelu reálneho dopravného systému.

Počítačová simulácia si môžeme predstaviť ako proces, ktorý odráža chovanie nejakého skutočného reálneho alebo imaginárneho systému v čase. Pomocou počítačovej simulácie môžeme analyzovať systémy bez toho, aby sme ich museli konštruovať. Toto sa využíva hlavne pri dopravných systémoch, pretože reálna konštrukcia môže byť nákladná a ťažko uskutočniteľná. Simulácia sa taktiež používa na predpoveď počasia, ekonomické odhady alebo pre generovanie reálneho prostredia v simulátoroch. Oblasť pôsobenia počítačovej simulácie je teda veľmi široká [1].

Pre účely overenia rozmiestnenia nabíjajúcich vedení pre parciálne trolejbusy môže byť, po nutných rozšíreniach funkcionality, potenciálne využitý nástroj s názvom OptSim. Jedná sa o softvérový nástroj na návrh a simuláciu dopravných systémov vyvíjaný na Fakulte riadenia a informatiky, Žilinskej univerzity. Projekt prebieha od roku 2015. V súčasnosti je v rámci

projektu vytvorený simulačný model prevádzky liniek Dopravného podniku mesta Žiliny s.r.o. (*DPMŽ*<sup>4</sup>) vytvorený v nástroji Anylogic využívajúci reálne cestovné poriadky, pričom priebeh simulácie je vizualizovaný na mapových podkladoch Open Street Map (*OSM*<sup>5</sup>) a editor cestovných poriadkov mestskej hromadnej dopravy (*MHD*<sup>6</sup>) umožňujúci spracovanie reálnych cestovných poriadkov. Projekt bol taktiež rozšírený o možnosť editácie cestnej siete a simulačný model bol rozšírený o reálne obehly vozidiel, údaje o prepravovaných cestujúcich a modelovanie zdržaní v cestnej sieti. V súčasnosti sa projekt rozširuje o mikroskopickú a mezoskopickú simuláciu cestujúcich a ich pohyb po infraštruktúre. Taktiež je pridaný inteligentný vyhľadávač cestovných spojení [44]. Ukážka rozhrania nástroja OptSim sa nachádza na obrázku 4.2.



**Obrázok 4.2:** Ukážka rozhrania nástroja OptSim.

<sup>4</sup>Dopravný podnik mesta Žiliny s.r.o – spoločnosť poskytujúca mestskú hromadnú dopravu v Žiline

<sup>5</sup>OpenStreetMap – mapový projekt, ktorého cieľom je tvorba voľných geografických dát, pod licenciou Open Database License

<sup>6</sup>Mestská hromadná doprava – označenie pre osobnú hromadnú prepravu v mestách

# Kapitola 5

## Ciel' a metodika práce

V tejto časti vymenujeme najdôležitejšie ciele práce. Následne sa budeme venovať návrhu metodiky postupu, ktorý použijeme na ich postupné dosiahnutie.

### 5.1 Ciele práce

Cielom práce bude, na základe vybranej technológie, navrhnúť matematický model návrhu infraštruktúry pre elektrické vozidlá vo verejnej doprave, ktorý zohľadňuje rôzne špecifické podmienky súvisiace s verejnou dopravou. Vybranou technológiou hromadnej dopravy sú parciálne trolejbusy. Pre vytvorený model je potrebné nájsť vhodné riešiacie algoritmy, ktoré budú založené na metódach riešiacich úlohy celočíselného programovania.

Túto úlohu môžeme rozdeliť na niekoľko hlavných častí:

- Návrh vhodných matematických modelov na popis úlohy.
- Overenie rozsahu riešiteľnosti modelu exaktnými metódami a ich porovnanie.
- Preskúmanie vhodných heuristických spôsobov riešenia danej úlohy.
- Zhodnotenie a porovnanie exaktných a heuristických prístupov vzhľadom na riešenú úlohu.
- Overenie robustnosti riešení (napr. pomocou simulačného modelu).

Výstupom by malo byť riešenie navrhnuté optimalizačnými metódami. Na toto môžu byť využité rôzne exaktné, prípadne heuristické metódy, ktoré

ponúka informatická veda. Riešenie by malo navrhnúť optimálny spôsob, ako rozmiestniť napájacie vedenia pre parciálne trolejbusy pre zadaný digraf cestnej siete a zoznam liniek, prípadne turnusov. V ideálnom prípade by malo riešenie pokrývať všetky linky alebo turnusy v danej oblasti.

## 5.2 Metodika práce

Predstavené ciele dizertačnej práce budeme v nasledujúcich kapitolách postupne naplňať. Boli vypracované na základe analýzy existujúceho stavu problematiky, v ktorom sme sa bližšie venovali vlastnostiam využívaných vozidiel, ktorými sú parciálne trolejbusy a ich vlastnostiam ako napríklad veľkosť použitých batérií, spotreba energie, či rýchlosť dobíjania. Nemenej zaujímavé je to, ako na tieto parametre vplýva teplota vonkajšieho prostredia.

Nasledujúca kapitola je tou, kde vysvetlíme postupy, ktoré sme zvolili na riešenie danej úlohy. V časti 6.1 začíname popisom dát, ktoré využívame na jednotlivé experimenty. Jedná sa o dáta o linkách a turnusoch vozidiel hromadnej dopravy, ktoré sú prevádzkované v meste Žilina. Postupne predstavíme dáta a úlohy rôzneho rozsahu, ktoré sme následne využívali na overenie funkčnosti modelov a rozsahu riešiteľnosti jednotlivých úloh.

Potom, čo čitateľa oboznámime so vstupnými dátami, sa budeme venovať jednotlivým exaktným a heuristickým spôsobom na riešenie danej úlohy. Na exaktné riešenie využívame už predstavené nástroje na riešenie úloh lineárneho programovania ako napríklad simplexová metóda či metóda vetiev a hraníc. Kombinácie týchto metód sú už implementované v nami zvolenom *IP*-solveri XPRESS. Pre približné riešenie optimalizačných úloh využívame s výhodou vybrané heuristiky ako napríklad Kernel Search.

V časti 6.2 popíšeme prechodový model úlohy a jeho modifikáciu. Bol vytvorený modifikáciou modelu, ktorý predstavujeme v časti 3.2.3. Tento matematický model je vhodný na riešenie úloh menšieho rozsahu, preto predstavíme možnosť, ako zväčšiť rozsah úloh jeho využitím vo vlastnom heuristickom riešení.

V časti 6.3 sa venujeme lokačnému modelu úlohy, ktorý funguje na inom princípe. Vďaka tomu, že úlohu sme popísali týmto spôsobom, bolo možné využiť presnejšie vstupné dáta a riešiť veľké úlohy. Tento matematický model predstavíme v dvoch modifikáciách, ktoré vzájomne porovnáme. Pri tomto porovnaní nás bude zaujímať kvalita riešenia a aj čas výpočtu. Následne sa venujeme aj porovnaniu riešení získaných exaktne a pomocou pažravej heuristiky, metaheuristiky Simulated Annealing či heuristiky Kernel Search.

V podkapitole 6.4 sa venujeme zovšeobecnenému modelu úlohy. Tento

model rieši modifikovanú úlohu, kde je možné niektoré úseky vyhlásiť za už pokryté vedením a na iných zakázať výstavbu. Môže byť zaujímavý hlavne preto, že viac zohľadňuje súčasný stav dopravnej siete v oblasti budúceho nasadenia parciálnych trolejbusov. Model úlohy porovnáваме aj s modelom popisujúcim pôvodnú úlohu.

V neposlednom rade popíšeme spôsob overovania výsledkov pomocou modelového prepočtu robustnosti riešení. Tento spôsob môže byť využitý, ak chceme overiť, či bude riešenie dostatočné v prípade, že by nastalo výrazné zvýšenie spotreby vozidla na niektorých úsekoch.

V závere dizertačnej práce zhodnotíme jednotlivé prístupy ku riešeniu úlohy a dosiahnuté výsledky. Popíšeme prínos práce či už z vedeckého hľadiska alebo jej prínos pre praktické využitie. Budeme sa venovať aj možnému smerovaniu výskumu do budúcnosti.

# Kapitola 6

## Výsledky a ich zhodnotenie

V tejto časti práce sa budeme venovať vlastným výsledkom výskumu. Najprv predstavíme súbory dát, ktoré sme použili na numerické experimenty. Máme dva rôzne súbory dát, prvý pre experimenty, ktoré sa týkajú prechodového modelu úlohy. Následne boli vytvorené väčšie a presnejšie datasety, ktoré využívame pri experimentoch s lokačnými modelmi. Potom postupne predstavíme niekoľko lineárnych modelov, ktoré popisujú danú úlohu. Tieto modely vzájomne porovnáme.

Na riešenie úlohy boli využité aj viaceré približné heuristické metódy, ktorým sa rovnako budeme venovať. V závere predstavíme zovšeobecný model úlohy a spôsob overovania robustnosti získaných riešení.

### 6.1 Popis testovacích dát

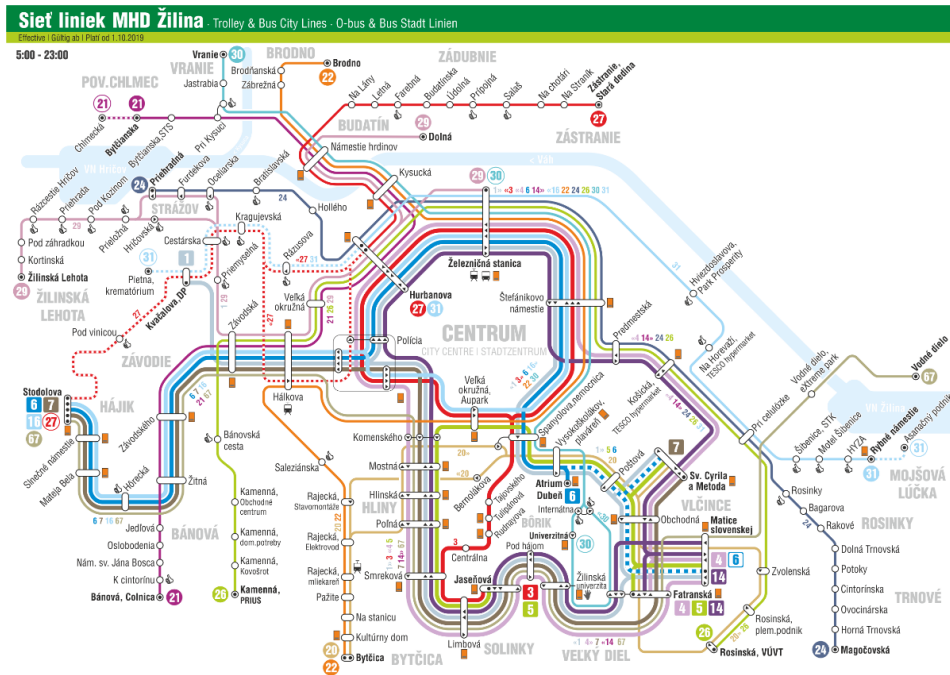
Ako dátové vstupy pre riešenie úloh súvisiacich s použitím parciálnych trolejbusov vo verejnej doprave použijeme dostupné údaje o sieti verejnej dopravy. Máme k dispozícii turnusy vozidiel mestskej hromadnej dopravy v meste Žilina. V Žiline sa nachádza 8 trolejbusových a 11 autobusových liniek, ktoré sú denne obsluhované 60 vozidlami [9]. Ilustrácia kompletnej siete liniek v Žiline sa nachádza na obrázku 6.1.

Ďalej využijeme aj dostupné geografické dáta zo systému *OSM*. Jedná sa o medzinárodný projekt, ktorého cieľom je vytvárať a udržiavať voľnú digitálnu mapu sveta. Dátové podklady *OSM* sú pod licenciou *ODbL*<sup>1</sup>. Táto licencia umožňuje voľné používanie dát za dodržania stanovených podmienok.

Testovacie dáta sú získavané s pomocou programu *OptSim*, ktorý je bližšie predstavený v časti 4.3. Pomocou programu sme získali dátové súbory,

---

<sup>1</sup>*Open Database License* – licencia, ktorá umožňuje slobodne zdieľať, upravovať a používať databázu za podmienky zachovania rovnakej slobody pre ostatných používateľov.



Obrázok 6.1: Linky v meste Žilina počas dňa

z ktorých vytvárame jednotlivé testovacie úlohy rôzneho rozsahu podľa potreby.

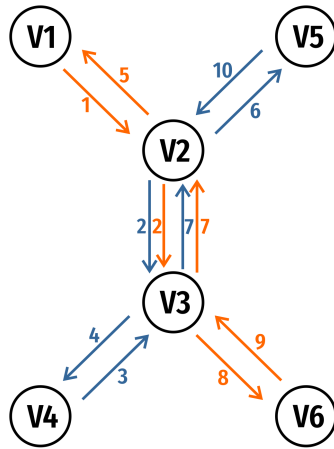
Pri riešení úlohy aktuálne používame už existujúce turnusy vozidiel. Turnus je daný postupnosťou liniek. Linka sa zasa skladá zo zoznamu zastávok. Každá linka má definovanú aj trasu, ktorou prechádza medzi zastávkami. Tieto trasy majú určenú vzdialenosť [15].

### 6.1.1 Malá testovacia úloha

Pre overenie základnej funkčnosti všetkých predstavených modelov bola vytvorená malá testovacia úloha, ktorú je možné prepočítať aj ručne. Táto sieť pozostáva zo 6 vrcholov a 10 orientovaných hrán.

Dĺžka každej z hrán bola nastavená rovnako a to na hodnotu 100 m. Maximálna úroveň nabitia batérie bola 100 kWh a minimálna 0 kWh. Rýchlosť nabíjania sme stanovili na 0,5 kWh/m a spotrebu energie na 0,25 kWh/m. Náčrt úlohy sa nachádza na obrázku 6.2.





**Obrázok 6.2:** Ilustrácia malej testovacej úlohy

Pre prvú testovaciu úlohu sme zvolili dva turnusy vozidiel zo šiestimi zastávkami. Prvý obsahoval nasledujúci zoznam zastávok: [1, 2, 3, 4, 7, 5], zatiaľ čo druhý: [10, 2, 8, 9, 7, 6]. Optimálne riešenie je samozrejme pokrytie vedením segmentu z vrcholu  $V3$  do vrcholu  $V2$  s číslom 7.

Následne sme vytvorili druhú testovaciu úlohu, kde sme použili dva dlhšie turnusy. Vznikli 6-násobným opakovaním turnusov z predošlej úlohy. Ako optimálne riešenie majú byť zvolené dva segmenty a to s číslami 2 a 7, ktoré sú spoločné pre oba turnusy.

### 6.1.2 Vstupné dáta pre prechodový model

Vstupné dáta je potrebné vopred spracovať tak, aby bolo možné ich ďalšie využitie pri riešení optimalizačného problému pomocou lineárneho modelu ktorý bude predstavený v časti 6.2.1.

V prvom kroku je vytvorený lineárny zoznam všetkých úsekov medzi zastávkami, ktoré využívajú jednotlivé trasy. Každému úseku je pridelený jedinečný identifikátor ( $ID^2$ ). Pre každú trasu je vytvorený zoznam úsekov, ktoré sa na danej trase využívajú. V tomto zozname sa môžu úseky opakovať. Potom sú postupne nájdené všetky kombinácie, ako je možné pokryť dané trasy vedením (možnosti pokrytia respektíve nepokrytia jednotlivých úsekov). Z týchto kombinácií sú zvolené tie, ktoré je možné vozidlom prejsť. Tento komplexný proces je ovplyvnený rôznymi externými parametrami a faktor-

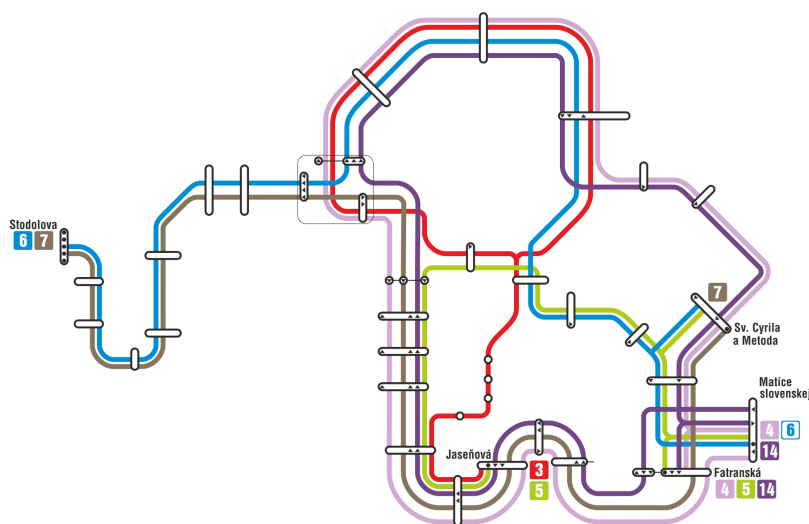
<sup>2</sup>*Identifier* – Identifikátor

mi. Vzniknú výstupné súbory, ktoré sú načítané ako vstupy pre exaktnú optimalizáciu v nástroji Xpress IVE [21].

Pre overenie funkčnosti prechodového modelu úlohy sme vybrali niekoľko liniek. Jedná sa o linky 14, 3, 4, 5, 50, 6 a 7. Zoskupovanie úsekov trás a iné optimalizácie vstupných dát neboli potrebné. Dáta boli konvertované pomocou spomínaného postupu. Maximálny počet úsekov na linke bol 15 až 21 v piatich vytvorených testovacích úlohách. Testovacie dáta sa nachádzajú v tabuľke 6.1 [16] a linky sú ilustrované aj na obrázku 6.3.

Linka	Počet zastávok	Začiatok	Cieľ
14	20	Matice slovenskej	Fatranská
3	21	Jaseňová	Jaseňová
4	21	Fatranská	Matice slovenskej
5	15	Fatranská	Jaseňová
50	21	Železničná stanica	Stodolova
6	18	Stodolova	Matice slovenskej
7	12	Stodolova	Sv. Cyrila a Metoda

**Tabuľka 6.1:** Používané linky v Žiline



**Obrázok 6.3:** Ukážka vybraných liniek v meste Žilina.

Okrem dát, ktoré sa týkajú cestnej siete a trunusov vozidiel, je potrebné uviesť aj parametre vozidiel. Ide napríklad o kapacitu batérie, spotrebu energie a rýchlosť nabíjania. Parametre spojené s vozidlom sú v tabuľke 6.2.

Parameter	Hodnota	Jednotka
Minimálny SOC	20	%
Maximálny SOC	80	%
Kapacita batérie	50	kWh
Spotreba energie	1.5	kWh/km
Rýchlosť nabíjania	30	s/1kWh
Rýchlosť vozidla	30	km/h

**Tabuľka 6.2:** *Parametre vozidiel zvolené pre experimenty*

### 6.1.3 Testovacie úlohy pre heuristiku s využitím prechodového modelu

Ďalšie testovacie úlohy boli vytvorené špeciálne pre potreby heuristiky. Boli zvolené dve dvojice turnusov. Parametre vozidiel zostali nezmenené a nachádzajú sa v tabuľke 6.2.

V prvom testovacom príklade sme zvolili dva turnusy. Prvý turnus s názvom 4\_4a, ktorý obsluhuje desať spojov, z čoho je väčšina na linkách 4 a 14. Okrem toho turnus obsahuje aj skrátenú jazdu na linke 1 a jazdu linkou 5. Druhý turnus 5\_1a obsluhuje desať jazd na linke 5. Informácie o turnusoch sa nachádzajú v tabuľke 6.3 [23].

Turnus	Linka	Počet zastávok
4_4a	4	20
	14	20
	1m	13
	5a	16
	5b	15
5_1a	5a	16
	5b	15

**Tabuľka 6.3:** *Vybrané turnusy 4\_4a a 5\_1a a ich linky.*

V druhej testovacej úlohe sme tiež zvolili dva turnusy, ktoré sú popísané v tabuľke 6.4. Prvý turnus vozidla má názov 24\_5 a obsluhuje 14 spojov. Jedná sa prevažne o spoje na linke 24, ale tiež obsluhuje skrátené spoje na linke 30. Druhý turnus s názvom 26\_3 obsluhuje 11 spojov na linke 26 [23].

Turnus vozidla	Linka	Počet zastávok
24_5	24	20
	24ž	7
	30ž	6
26_3	26a	17
	26b	18
	26ž	9

**Tabuľka 6.4:** *Vybrané turnusy vozidiel.*

#### 6.1.4 Vstupné dáta pre lokačné modely

Pre potreby vykonania ďalších experimentov bolo nutné vytvoriť súbory testovacích dát. Dáta sme opäť získali pomocou programu OptSim. Ako geografický podklad slúžia dáta zo systému *OSM*.

V časti 6.1.2 popisujeme dáta využité na overenie testovacieho modelu. Tieto dáta bolo potrebné upresniť z dvoch hlavných dôvodov. Prvým je, že pôvodné dáta obsahujú len zastávky, ale ignorujú dôležité križovatky. Toto zapríčiňuje zdvojenie pokrytia hrany vedením v istých prípadoch. Druhým dôvodom boli servisné jazdy. To sú prechody z depa na linku, alebo medzi linkami. Pôvodné dáta nedisponovali informáciou, kadiaľ daná servisná jazda vedie. Takto boli vytvorené dlhé hrany, ktoré boli v grafe samostatne, aj keď reálne vozidlo využíva existujúce hrany grafu. Vznikala tak nepresnosť vo výsledkoch, ak boli spomínané hrany pokryté vedením [19].

Preto bol vytvorený nový formát súborov s podrobnými dátami, ktorý obsahuje všetky potrebné informácie o turnuse vozidla. Každé vozidlo má svoj typ a číslo. Nasleduje zoznam prechodov vozidla po jednotlivých hranách v turnuse. Riadky obsahujú nasledujúce informácie: číslo linky, číslo spoja, *ID OSM* štartovacieho vrcholu, *ID OSM* cieľového vrcholu, počet prechodov hranou a dĺžka hrany v metroch. Ukážka začiatku súboru s dátami sa nachádza v prílohe B. Vrcholom môže byť depo, zastávka a *OSM* križovatka. Z toho vyplýva, že medzi hranami sú mnohé križovatky, cez ktoré všetky vozidlá prejdú vždy rovnako. Preto majú hrany parameter počtu prechodov hranou. Ak po sebe nasledujú dve hrany, ktoré majú rovnaký počet prechodov, tak to znamená, že hrany môžeme zlúčiť, lebo križovatka nie je dôležitá.

Na tento účel bol vytvorený program v jazyku C#, do ktorého je možné načítať vstupný súbor, zvoliť vozidlá a výsledkom je výsledný digraf a všetky potrebné vstupné súbory pre optimalizáciu. Tento program vykonáva aj zlúčenie hrán. Umožňuje aj spätnú konverziu výsledkov. Tento program bol následne aj rozšírený o možnosť riešiť úlohu niektorými heuristikami.

Pripravili sme 8 testovacích úloh, rôznej veľkosti. V najjednoduchšom prípade išlo o jeden turnus, potom o viaceré turnusy a nakoniec až turnusy všetkých vozidiel v meste. Parametre testovacích úloh sa nachádzajú v tabuľke 6.5.

Názov úlohy	Počet vozidiel	Počet jedinečných úsekov	Priemerný počet úsekov turnusu	Celková dĺžka použitých úsekov (m)
Bus 1	1	215	426,0	40 809
Tbus 1	1	129	1146,0	17 449
Bus 5	5	486	954,2	100 041
Tbus 5	5	254	946,2	37 469
Tbus ZA	30	299	1320,4	45 174
Bus ZA	30	753	764,2	209 445
ZA	60	779	1042,3	212 618
ZA dva dni	60	779	2084,6	212 618

**Tabuľka 6.5:** Zvolené testovacie úlohy.

Počiatočný stav nabitia batérie počítame ako 100% kapacity, pri všetkých testovacích úlohách. V časti 3.1.1 sme sa venovali aj tomu, akým spôsobom počasie ovplyvňuje kapacitu batérie vozidla. Tento vplyv je značný [14], [61], preto sme vytvorili tri scenáre (jarný, letný a zimný). Jarný scenár reprezentuje "štandardnú prevádzku vozidla" pri teplote 18 stupňov Celzia, kedy vozidlo nie je teplotou ovplyvnené. V letnom scenári predpokladáme, že je potrebné spotrebovať dodatočnú energiu na klimatizovanie vozidiel. Zimný scenár má rovnako zvýšené nároky na energiu, keďže je potrebné vykurovať priestor vozidla a zároveň zohrievať batérie. Okrem toho sa v chladnom počasí aj znižuje kapacita batérie, čo simulujeme znížením jej kapacity. Spotreba energie vozidla je odvodená z dát získaných pozorovaním už nasadených vozidiel [2]. Jednotlivé scenáre a parametre vozidiel sú v tabuľke 6.6.

Scenár	Minimálny stav batérie (kWh)	Maximálny stav batérie (kWh)	Nabíjanie (kWh/m)	Spotreba (kWh/m)
jar	10	40	0,0026	0,0013
leto	10	40	0,0026	0,0023
zima	10	30	0,0026	0,0023

**Tabuľka 6.6:** *Scenáre a parametre vozidiel.*

## 6.2 Prechodový model na umiestňovanie vedenia podľa liniek

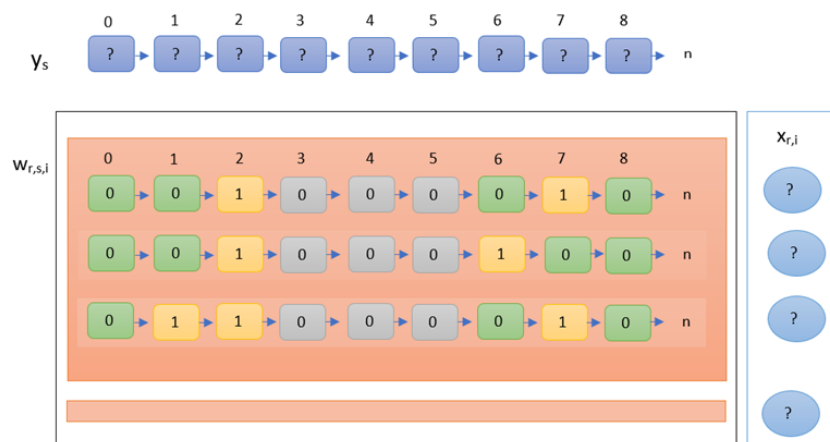
V tejto časti popíšeme náš prvý prístup ku podpísaniu danej úlohy. Tento lineárny model je založený na výbere možností prechodu hranou. Bol vytvorený úpravou modelu, ktorý bol predstavený v súvisiacom výskume popísanom v časti 3.2.2. Keďže potrebujeme navrhnúť minimálnu sieť, na rozdiel od maximalizácie pri obmedzenom rozpočte, bolo potrebné upraviť účelovú funkciu a nahradiť jednu z podmienok. Úpravy ďalších podmienok boli nutné z dôvodu mierne odlišného charakteru riešenej úlohy. Toto sa týkalo hlavne iného tvaru vstupných dát a snahy o zjednodušenie zápisu modelu.

### 6.2.1 Matematický model úlohy

Nech  $R$  je zoznam trás,  $I_r$  je zoznam prípustných alternatív ako prekonať trasu  $r$  a  $S$  je množina všetkých použitých segmentov. Potom  $n$  je počet segmentov a  $m$  počet trás [21].

Rozhodovacie premenné sú nasledujúce. Nech  $x_{r,i} \in \{0, 1\}$  je výber alternatívy  $i$  pre trasu  $r$ . Následne  $y_s \in \{0, 1\}$  rozhoduje, či segment  $s$  v digrafe bude alebo nebude pokrytý trolejovým vedením [21].

Ostatné vstupné konštanty, ktoré sú potrebné pre model úlohy, vyzerajú takto. Kombinácie sú reprezentované  $w_{r,s,i} \in \{0, 1\}$ , kde pre trasu  $r$  na segmente  $s$  pre alternatívu  $i$  je potrebné trolejové vedenie. Potom  $a_r$  je počet prípustných kombinácií pre trasu  $r$  a  $c_s$  sú náklady na vybudovanie vedenia na segmente  $s$  [21]. Ilustrácia sa nachádza na obrázku 6.4.



**Obrázok 6.4:** Ilustrácia vzťahov medzi rozhodovacími premennými a dátami.  $y_s$  a  $x_{r,i}$  sú rozhodovacie premenné,  $w_{r,s,i}$  vstupné dáta (jednotlivé prípustné kombinácie) vysvetlené na obrázku 2.5. Bunky s hodnotou 0 reprezentujú jednotlivé úseky, kde je alebo nie je potrebné vybudovanie vedení. Modré bunky nie sú použité na danej trase.

$$\min \sum_{s=1}^n c_s \cdot y_s. \quad (6.1)$$

Za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{a(r)} x_{r,i} = 1 \quad \text{for } r = 1..m. \quad (6.2)$$

$$n \cdot y_s \geq \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^{a(r)} x_{r,i} \cdot w_{r,s,i} \quad \text{for } s = 1..n. \quad (6.3)$$

$$y_s \in \{0, 1\} \quad \text{for } s = 1..n, \quad (6.4)$$

$$x_{r,i} \in \{0, 1\} \quad \text{for } r = 1..m; \quad i = 1..a(r). \quad (6.5)$$

Účelová funkcia 6.1 zabezpečuje minimalizáciu celkových nákladov na výstavbu trolejových vedení. Podmienka 6.2 slúži pre výber jednej kombinácie pre každú z možností pre danú linku. Podmienka 6.3 zabezpečuje, že trolejové vedenie bude vystavané, ak aspoň jedna z liniek vyžaduje výstavbu na danom úseku. Nakoniec výrazy 6.4 a 6.5 sú obligatórne podmienky [21].

## 6.2.2 Numerické experimenty

Prvotné testovanie bolo zamerané na overenie funkčnosti modelu. Pre tento účel bola využitá malá úloha, ktorej sa venujeme v časti 6.1.1. Po tomto overení sme využili testovacie linky popísané v časti 6.1.2.

Okrem overenia funkčnosti modelu sme sa snažili nájsť maximálnu dĺžku linky, ktorá môže byť spracovaná. Zároveň bolo potrebné, aby sa zvolené linky čiastočne prekryvali. Toto je možné vidieť na obrázku 6.3. Najdlhšie z trás boli na začiatku skrátene a úseky sme postupne pridávali. Nakoniec sme narazili na limity, či sa už jednalo o časové, alebo spôsobené nedostatkom operačnej pamäte. Výsledky týchto testov sa nachádzajú v tabuľke 6.7.

Počet liniek	Maximálny počet úsekov	Trvanie konverzie dát (s)	Trvanie riešenia úlohy (s)
7	15	1.30	8.20
7	18	5.10	142.40
7	19	9.10	525.60
7	20	16.80	134568.40
7	21	-	-

**Tabuľka 6.7:** *Trvanie konverzie dát a riešenia úlohy*

Z predošlých experimentov vyplýva, že model je funkčný, ale nie je možné riešiť úlohy väčšieho rozsahu. Pomocou tohoto modelu sme schopní riešiť úlohy do veľkosti 20 úsekov, čo postačuje na niektoré linky. Z definície problému vyplýva, že by sme mali vytvárať sieť pomocou dát o turnusoch vozidiel. Na tento účel je nutné preskúmať ďalšie prístupy ku riešeniu úlohy.

## 6.2.3 Úprava matematického modelu

Predošlú formuláciu matematického modelu sa snažíme vylepšiť úpravou podmienky 6.3 na tvar 6.6.

$$y_s \geq \sum_{i=1}^{a(r)} x_{r,i} \cdot w_{r,s,i} \quad \text{for } s = 1..n; \quad r = 1..m. \quad (6.6)$$

Význam modelu ani danej podmienky sa touto zmenou nemení. Prínos je v tom, že pri riešení úlohy pomocou *IP* solvera XPRESS vytvárame podmienky 6.6 pre každú trasu a každý segment. V ďalšej časti textu porovnáme riešenia získané optimalizáciou úlohy, ktorá bude popísaná oboma predstavenými verziami modelu [23].



## 6.2.4 Heuristická metóda na riešenie turnusov s využitím prechodového modelu

Pomocou predstaveného prechodového modelu úlohy nie je možné optimálne pokryť cestnú sieť vedením na základe turnusov vozidiel. Tento problém sa dá vyriešiť využitím čiastkových optimalizácií úlohy exaktne pre jednotlivé linky. Prepojenia medzi turnusmi budú podliehať istému zjednodušeniu. Preto je nutné zabezpečiť, aby vozidlo začínalo jazdu so stavom batérie 60% a končilo so stavom aspoň 60%. Týmto spôsobom nájdeme prípustné riešenie, ktoré zabezpečí, že vozidlo bude schopné prekonať celý turnus, aj keď nebude optimálne. Okrem optimalizácie vybraných turnusov budeme porovnávať aj vplyv úpravy modelu na riešenie [23].

### 6.2.4.1 Prvá testovacia úloha

Popis dát využitých na experimenty sa nachádza v časti 6.1.3. Optimálne riešenie zjednodušenej úlohy má hodnotu účelovej funkcie 7477 *m*. Účelová funkcia predstavuje dĺžku cestných úsekov, ktoré boli zvolené pre budovanie nabíjajúcich úsekov. Celá dĺžka všetkých úsekov cesty je 35566 *m*, čo znamená, že približne 21% trasy bolo zvolenej na elektrifikáciu. V tabuľke 6.8 sa nachádzajú riešenia získané pomocou oboch verzií matematického modelu.

	Originálny model	Upravený model
Podmienky (na začiatku)	76	336
Podmienky (po pred-riešení)	76	336
Premenné (na začiatku)	3816093	3816093
Premenné (po pred-riešení)	2099867	1482018
Čas výpočtu (s)	6134	3248
Hodnota účelovej funkcie	7478	7477

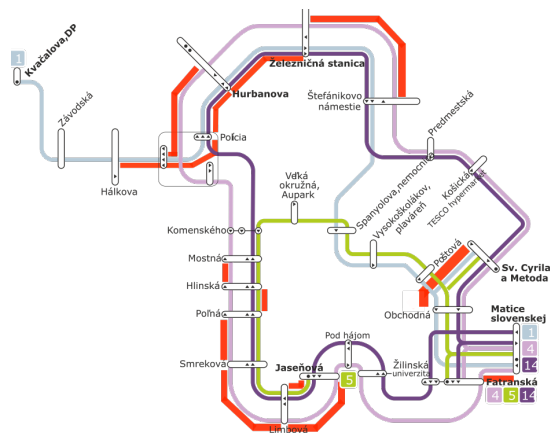
**Tabuľka 6.8:** Porovnanie pôvodného modelu a upravenej verzie.

Na základe tohoto porovnania vidíme, že úprava modelu mala pozitívny vplyv na proces riešenia danej úlohy. Ako môžeme vidieť, tak počet podmienok vzrástol, zatiaľ čo počet premenných zostal rovnaký. Po fáze pred-riešenia úlohy výrazne klesol počet premenných práve pri použití upravenej verzie modelu. Fáza pred-riešenia v IP solveri znamená, že úloha sa zjednoduší pomocou odstránenia redundantných podmienok a upresnenia hraníc premenných. Navyše pomocou originálnej formulácie matematického modelu nebolo možné dokončiť hľadanie optimálneho riešenia. Optimálne riešenie bolo nájdené len pomocou upravenej verzie modelu, kedy sa zároveň znížil

aj výpočtový čas [23]. Vybrané segmenty trasy sa nachádzajú v tabuľke 6.9 a okrem toho sú ilustrované na obrázku 6.5.

Začiatkový vrchol	Koncový vrchol
Háľkova	Polícia
Polícia	Hurbanova
Hurbanova	Železničná stanica
Sv. Cyrila a Metoda	Obchodná
Jaseňová	Limbová
Polná	Hlinská
Malice slovenskej	Fatranská
Štefánikovo námestie	Železničná stanica
Hurbanova	Polícia
Mostná	Hlinská
Polná	Smreková
Smreková	Limbová
Limbová	Jaseňová

**Tabuľka 6.9:** Vybrané úseky segmentov v riešení.



**Obrázok 6.5:** Ilustrácia segmentov pokrytých vedením.

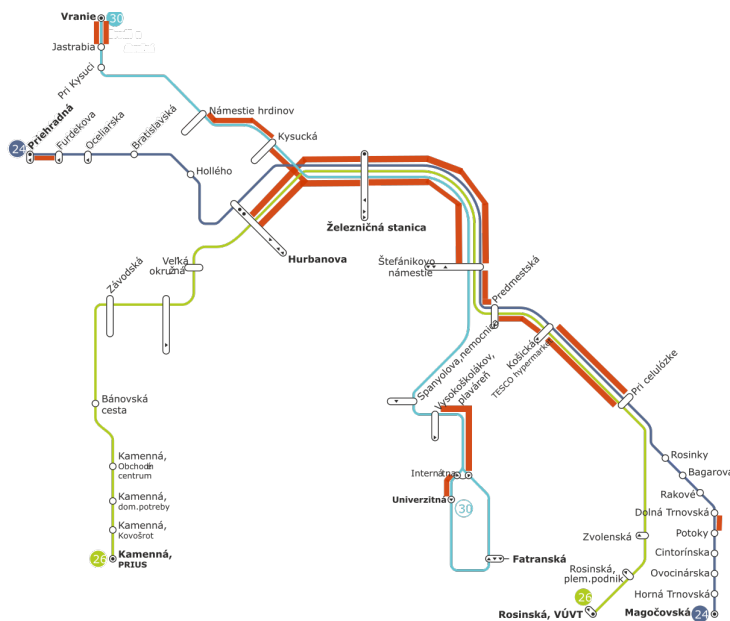
### 6.2.4.2 Druhá testovacia úloha

Popis dát využitých na experimenty sa nachádza v časti 6.1.3. V tabuľke 6.10 sa nachádzajú parametre riešenej úlohy pomocou predstavených modelov. Môžeme konštatovať, že optimálne riešenie bolo nájdené pomocou oboch modelov. Riešenie trvalo kratšie pomocou originálneho modelu.

	Originálny model	Upravený model
Podmienky (na začiatku)	108	380
Podmienky (po pred-riešení)	107	379
Premenné (na začiatku)	4020976	4020976
Premenné (po pred-riešení)	2295378	1106005
Čas výpočtu (s)	800	1299
Hodnota účelovej funkcie	10566	10566
Nájdené optimálne riešenie?	áno	áno

**Tabuľka 6.10:** Porovnanie riešení pomocou modelov

Optimálne riešenie, ktoré popisuje dĺžku úsekov zvolených na elektrifikáciu, má v tomto prípade hodnotu 10566 m. Celková dĺžka všetkých úsekov cesty bola 35984 m. Teda bolo zvolených približne 19.6% cestnej siete. Vybrané segmenty sa nachádzajú v tabuľke 6.11 a na obrázku 6.6 [23].



**Obrázok 6.6:** Ilustrácia segmentov pokrytých vedením.

Počiatočný vrchol	Konečný vrchol
Priehradná	Furdekova
Hurbanova	Železničná stanica
Železničná stanica	Štefánikovo námestie
Predmestská	Košická, TESCO hyp.
Košická, TESCO hyp.	Pri celulózke
Potoky	Dolná Trnovská
Pri celulózke	Košická, TESCO hyp.
Predmestská	Štefánikovo námestie
Štefánikovo námestie	Železničná stanica
Železničná stanica	Hurbanova
Kysucká	Námestie hrdinov
Jastrabia	Vrania
Vrania	Jastrabia
Kysucká	Železničná stanica
Internátna	Univerzitná
Internátna	Vysokoškolákov plávareň

**Tabuľka 6.11:** Vybrané segmenty v riešení.

### 6.2.5 Zhodnotenie

Prechodový model na umiestňovanie vedenia má svoje obmedzenia. Tieto sú také silné, že nie je možné jeho nasadenie na riešenie úlohy pre väčšie datasey. Exaktne sa nám podarilo riešiť pokrytie vedenia pre jednotlivé linky. Linka musela byť ale dĺžky maximálne 20 zastávok, čo znemožňuje spresnenie dát, napríklad o dôležité križovatky [23].

Tento matematický model je možné využiť tak, aby sme zreťazením viacerých optimalizácií liniek získali pokrytie celých turnusov. Toto pokrytie zaručuje, že vozidlo s danými parametrami bude schopné prekonať trasu. Nejedná sa však o exaktné riešenie, ale jedná sa o heuristické riešenie, lebo muselo dôjsť k zjednodušeniu úlohy. Toto zjednodušenie spočíva v tom, že bolo potrebné zabezpečiť, aby na konci obsluhy spoja malo vozidlo určitú hodnotu nabitia, s ktorou sa počítalo, že bude začínať na dlhšom spoji [23].

Z týchto dôvodov sa v ďalšej časti práce budeme venovať návrhu nového matematického modelu a aj úprave a upresneniu vstupných dát, tak aby bolo možné riešiť úlohy väčších rozsahov [23].

## 6.3 Lokačný model úlohy

V ďalšej časti výskumu sme sa zamerali na vytvorenie nového matematického modelu, ktorý by popisoval danú úlohu. Tento model je postavený na základe lokačného charakteru úlohy. Dôvodom bolo, že sme narazili na výrazné limitácie predošlého prechodového modelu. V kapitole 3.3 sme sa zaoberali popisom štandardnej lokačnej úlohy a jej využitím. Pripomenieme, že v jej prípade sa jedná o umiestňovanie na vrcholech v grafe.

V našom prípade je situácia iná. Potrebujeme umiestniť vedenie práve na hranách grafu cestnej siete. Matematický model vznikol ako úprava lokačného prístupu, ku ktorému sme pridali podmienky týkajúce sa spotreby energie vozidlom počas jazdy.

### 6.3.1 Základný lokačný model úlohy

V tejto časti predstavíme základný lokačný model úlohy. Výhodou tohoto modelu je, že popisuje úlohu iným spôsobom, ako tomu bolo v predošlom modeli. Táto zmena nám dovoľuje riešiť väčšie úlohy, spresniť vstupné dáta a zachováva energiu medzi jednotlivými jazdami v turnuse. Táto verzia modelu slúžila ako základ na ďalšie pokračovanie výskumu. Model bol následne upravený do ďalších dvoch verzií, ktoré budú tiež predstavené.

Predstavený matematický model popisuje danú úlohu. Jeho správnosť bola v počítačovej fáze overená na malých úlohách predstavených v časti 6.1.1. Po overení funkčnosti modelu na malých úlohách sme sa zamerali na optimalizovanie zápisu modelu. Tomuto sa budeme venovať v nasledujúcej časti práce. Nebude chýbať ani porovnanie vplyvu úpravy modelu na riešenie úlohy pomocou *IP* solvera.

V lokačnom modeli sa nachádzajú nasledujúce premenné a konštanty. Nech  $y_i$  je rozhodovacia premenná o vybudovaní alebo nevybudovaní vedenia na úseku  $i$ , potom  $x_{r,j+1}$  je rozhodovacia premenná o stave batérie vozidla  $r$  po prejdení úseku  $j$ . Ďalej  $B_{max}$  označuje maximálny stav batérie v  $kWh$ , respektíve  $B_{min}$  minimálny stav batérie v  $kWh$ . Následne  $CO$  je konštanta spotreby energie v  $kWh/m^3$  a  $CH$  je konštanta nabíjania z vedenia v  $kWh/m$ . Potom  $m$  je počet vozidiel (turnusov) a  $n$  je počet úsekov cesty,  $D_i$  je dĺžka úseku  $i$ ,  $a(r, j)$  je index  $j$ -teho úseku na trase vozidla  $r$  a  $q(r)$  je nakoniec počet úsekov v turnuse vozidla  $r$ .

---

<sup>3</sup>*kilowatt-hour / meter* – kilowatthodina na meter

$$\min \sum_{i=1}^n D_i \cdot y_i \quad (6.7)$$

Za podmienok:

$$x_{r,1} = B_{max} \quad r = 1..m. \quad (6.8)$$

$$x_{r,j+1} \geq -CO \cdot D(a_{r,j}) \cdot (1 - y(a_{r,j})) - B_{max} \cdot y(a_{r,j}) \quad (6.9)$$

*for*  $r = 1..m; \quad j = 1..q(r).$

$$x_{r,j+1} \leq -CO \cdot D(a_{r,j}) \cdot (1 - y(a_{r,j})) + B_{max} \cdot y(a_{r,j}) \quad (6.10)$$

*for*  $r = 1..m; \quad j = 1..q(r).$

$$x_{r,j+1} - x_{r,j} \leq CH \cdot D(a_{r,j}) \cdot y(a_{r,j}) \quad \textit{for} \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.11)$$

$$x_{r,j+1} - x_{r,j} + B_{max} \cdot (1 - y(a_{r,j})) \geq 0 \quad \textit{for} \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.12)$$

$$x_{r,j+1} \leq B_{max} \quad \textit{for} \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.13)$$

$$x_{r,j+1} \geq B_{min} \quad \textit{for} \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.14)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \textit{for} \quad i = 1..n. \quad (6.15)$$

$$x_{r,j} \geq 0 \quad \textit{for} \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.16)$$

Naším cieľom je vybudovať čo najlacnejší systém, preto účelová funkcia 6.7 pozostáva z minimalizácie nákladov na vybudovanie úsekov vedenia. Následne prvá podmienka 6.8 udáva počiatočný stav nabitia batérie na začiatku turnusu. Podmienky 6.9 a 6.10 zabezpečujú, že v prípade ak úsek nie je pokrytý vedením, bude odpočítaná spotreba po prejdení nasledujúceho úseku a zabezpečujú zachovanie energie. Ďalšia podmienka 6.11 zabezpečuje, že bude nabité maximálne toľko, koľko je možné na danom úseku, ak je vybudovaný. Podmienka 6.12 zabezpečuje, že sa nesmie spotrebovať energia, ak je vybudované vedenie. Podmienky 6.13 a 6.14 ohraničujú maximálny a minimálny stav batérie. Obligatórne podmienky majú čísla 6.15 a 6.16.

### 6.3.2 Substituovaný model úlohy

Ďalším krokom pri návrhu matematického modelu bolo jeho zjednodušenie. Preto sme prestavili jeho substituovanú verziu. Význam modelu je stále rovnaký. Boli odstránené nepotrebné podmienky, zlúčené podmienky pokrytia a ohraničujúce podmienky. Oproti lokačnému modelu, ktorý sme predstavili v časti 6.3.1 sa zmenilo pomenovanie rozhodovacích premenných nasledovne. Premenná  $y_i$  rozhoduje o vybudovaní alebo nevybudovaní vedenia na úseku  $i$  a  $z_{r,j+1}$  je rozhodovacia premenná o stave batérie vozidla  $r$  po prejení úseku  $j$ . Použité konštanty zostali zachované.

$$\min \sum_{i=1}^n D_i \cdot y_i \quad (6.17)$$

Za podmienok:

$$z_{r,1} = B_{max} - B_{min} \quad r = 1..m. \quad (6.18)$$

$$z_{r,j+1} - z_{r,j} \leq -CO \cdot D(a_{r,j}) \cdot (1 - y(a_{r,j})) + CH \cdot D(a_{r,j}) \cdot y(a_{r,j}) \quad (6.19)$$

*for*  $r = 1..m; \quad j = 1..q(r).$

$$z_{r,j+1} \leq B_{max} - B_{min} \quad \text{for } r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.20)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \text{for } i = 1..n. \quad (6.21)$$

$$z_{r,j} \geq 0 \quad \text{for } r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.22)$$

Vo finálnej, substituovanej verzii základného modelu úlohy na nachádzajú nasledovné podmienky. Účelová funkcia 6.17 zostáva stále nezmenená, teda minimalizuje náklady na vybudovanie úsekov vedenia. Podmienka 6.18 udáva počiatkový stav batérie na začiatku turnusu. Podmienka 6.19 udáva spotrebu a respektíve nabíjanie pri prejení daného úseku. Podmienka 6.20 označuje rozsah, v ktorom sa môže pohybovať stav batérie. Pod číslami 6.21 a 6.22 sa nachádzajú obligatórne podmienky.

### 6.3.3 Porovnanie prechodového a lokačných modelov

Hlavnou motiváciou na vytvorenie modelov úlohy na lokačnom princípe bola obtiažnosť riešenia úloh popísaných pomocou prechodového modelu. V časti 6.2.4 sme predstavili heuristické výsledky pre dva datasety získané pomocou prechodového modelu úlohy. Tieto datasety sme exaktne optimalizovali pomocou oboch predstavených lokačných modelov.

Porovnanie hodnôt účelových funkcií sa nachádza v tabuľke 6.12 a porovnanie výpočtových časov v sekundách sa nachádza v tabuľke 6.13. Z porovnaní v tabuľkách je zrejmé, že oba lokačné modely našli optimálne riešenie úlohy za neporovnateľne kratší čas, než heuristika s využitím prechodového modelu.

Dataset	Prechodový model	Lokačný model	Substituovaný model
Turnus 4_4a a 4_1a	7477	7156	7156
Turnus 24_5 a 26_3	10566	9875	9875

**Tabuľka 6.12:** Porovnanie hodnôt účelových funkcií ( $m$ ) nájdených pomocou prechodového a lokačných modelov

Dataset	Prechodový model	Lokačný model	Substituovaný model
Turnus 4_4a a 4_1a	6134	3	2
Turnus 24_5 a 26_3	1299	2	2

**Tabuľka 6.13:** Porovnanie času výpočtu ( $s$ ) prechodového a lokačných modelov

### 6.3.4 Numerické experimenty a porovnanie lokačných modelov

V tejto časti sa budeme venovať konkrétnym dátam a experimentom, ktoré boli využité na porovnanie lokačného a substituovaného modelu úlohy. Experimenty boli vykonané s využitím rôznych testovacích úloh. Pri prezentácii výsledkov sa zameriame na porovnanie výkonu oboch verzií predstaveného modelu. Oba modely dávajú relatívne dobré riešenia v krátkom čase. Gap je rozdiel medzi dolnou hranicou a najlepším nájdeným riešením. Vzniká vtedy, ak riešenie narazí na časové obmedzenie výpočtu. Výsledky sú rozdelené do troch tabuliek podľa jednotlivých scenárov. Jarný scenár na nachádza



v tabuľkách 6.14 a 6.15, letný v tabuľkách 6.16 a 6.17 a nakoniec zimný v tabuľkách 6.18 a 6.19.

Tabuľky s porovnaním výsledkov začínajú stĺpcom s názvom datasetu, potom nasledujú nájdené hodnoty účelových funkcií pre oba modely, vyjadrené v metroch a v percente pokrytia. Posledným údajom v tabuľke je gap, čo je rozdiel medzi dolnou hranicou a najlepším nájdeným riešením. Je nulový v prípade, že nebolo možné nájsť exaktné riešenie v konečnom čase. Tabuľky s časovým porovnaním začínajú rovnako stĺpcom s názvom datasetu a následne pokračujú porovnaním času výpočtu, ktorý bol obmedzený podľa veľkosti úlohy.

Dataset	Účelová funkcia (m)				gap (%)	
	Lok.	%	Subst.	%	Lok.	subst.
Bus 1	6859	16,81	6859	16,81	0,00	0,00
Tbus 1	4911	28,14	4911	28,14	0,00	0,00
Bus 5	15110	15,10	15109	15,10	0,11	0,00
Tbus 5	6685	17,84	6655	17,76	32,07	0,00
Tbus ZA	9805	21,71	8895	19,69	8,64	0,00
Bus ZA	24241	11,57	23198	11,80	12,70	0,00
ZA	26943	12,67	24434	11,49	18,69	0,00
ZA dva dni	29724	13,98	26976	12,69	34,97	0,04

**Tabuľka 6.14:** *Výsledky a porovnanie modelov - jarný scenár.*

Dataset	Čas výpočtu (s)	
	Lok.	Subst.
Bus 1	2,32	1,35
Tbus 1	2,94	0,73
Bus 5	9720,26	6,44
Tbus 5	5080,81	3,01
Tbus ZA	5988,09	67,25
Bus ZA	15062,20	842,98
ZA	15589,90	3254,20
ZA dva dni	15594,50	15586,00

**Tabuľka 6.15:** *Časové porovnanie modelov - jarný scenár.*

V jarnom scenári vidíme, že úlohu bolo možné vyriešiť exaktne pomocou substituovaného modelu v stanovenom čase takmer pri všetkých datasetoch. Jedinou výnimkou je posledný teda najväčší scenár, kde je ale gap veľmi malý. Substituovaný model úlohy vo všeobecnosti dosahoval kratšie časy výpočtu.

Dataset	Účelová funkcia (m)				gap (%)	
	Lok.	%	Subst.	%	Lok.	subst.
Bus 1	12308	30,16	12308	30,16	0,00	0,00
Tbus 1	7458	42,74	7458	42,74	0,00	0,00
Bus 5	25901	25,89	25898	25,89	13,58	0,00
Tbus 5	10708	28,58	10669	28,47	8,36	0,00
Tbus ZA	14861	32,90	13653	30,22	18,29	0,00
Bus ZA	44335	21,17	42518	20,30	12,63	0,00
ZA	46347	21,80	44471	20,92	17,16	0,04
ZA dva dni	57151	26,88	47100	22,15	60,99	0,03

**Tabuľka 6.16:** Výsledky a porovnanie modelov - letný scenár.

Dataset	Čas výpočtu (s)	
	Lok.	Subst.
Bus 1	1,64	0,44
Tbus 1	4,03	0,45
Bus 5	9720,84	6,72
Tbus 5	5081,00	3,56
Tbus ZA	5988,92	138,44
Bus ZA	15062,30	157,91
ZA	15586,10	15591,10
ZA dva dni	15602,60	15610,40

**Tabuľka 6.17:** Časové porovnanie modelov - letný scenár.

Podobne, ako v jarnom scenári, pozorujeme aj v letnom, že substituovaná verzia modelu dosahuje lepšie výpočtové časy a menšie rozdiely medzi dolnou a hornou hranicou riešení.

Dataset	Účelová funkcia (m)				gap (%)	
	Lok.	%	Subst.	%	Lok.	subst.
Bus 1	13912	34,09	13912	34,09	0,00	0,00
Tbus 1	7685	44,04	7685	44,04	0,00	0,00
Bus 5	27760	27,75	27590	27,75	10,09	0,01
Tbus 5	11210	29,92	11184	29,85	5,48	0,02
Tbus ZA	14944	33,08	14114	31,24	17,68	0,01
Bus ZA	48154	22,99	46455	22,18	19,85	0,02
ZA	50558	23,78	47760	22,46	23,14	0,06
ZA dva dni	59073	27,78	49684	23,37	39,49	0,15

**Tabuľka 6.18:** Výsledky a porovnanie modelov - zimný scenár.

Dataset	Čas výpočtu (s)	
	Lok.	Subst.
Bus 1	5,62	0,50
Tbus 1	3,08	0,90
Bus 5	9720,90	9727,90
Tbus 5	5081,00	5082,90
Tbus ZA	5991,20	5985,40
Bus ZA	15065,00	15063,00
ZA	15593,00	15598,00
ZA dva dni	15603,00	15600,00

**Tabuľka 6.19:** Časové porovnanie modelov - zimný scenár.

Zimný scenár sa ukazuje vo všeobecnosti ako náročnejší na výpočet. Exaktné riešenie bolo pomocou substituovaného modelu nájdené v stanovenom čase len pri dvoch najmenších úlohách.

Podľa údajov v tabuľkách 6.14, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18 a 6.19 môžeme pozorovať správanie sa oboch predstavených matematických modelov pri exaktnom riešení úlohy. Oba modely dávajú relatívne dobré riešenia v danom čase. Využitie substituovanej verzie matematického modelu sa ukazuje ako výhodnejšie. Týmto spôsobom je možné dosiahnuť exaktný výsledok pri väčších úlohách. Tam, kde nie je možné nájsť exaktné riešenie v danom čase, sa ale nájdené riešenie blíži optimu. Je predpoklad, že tento trend by sa ešte prehĺbil, keby boli riešené väčšie úlohy.

### 6.3.5 Pažravá heuristika

Riešená úloha je relatívne dobre riešiteľná exaktným spôsobom. Pri väčších úlohách narážame na časové obmedzenia, kedy sa v stanovenom čase nenájde exaktné riešenie. Pre rýchlejšie získanie prípustného riešenia, môžu slúžiť heuristiky, ktoré spomínáme v časti 4.2.

Ako prvú uvádzame jednoduchú primárnu implementáciu pažravej heuristiky. To znamená, že začína z prípustného riešenia, v ktorom sú pokryté vedením všetky úseky. Pracuje spôsobom, že postupne odstraňuje (ak je to možné) tie úseky ciest, po ktorých vozidlá verejnej hromadnej dopravy prechádzajú najmenej často. Algoritmus končí v prípade, že boli skontrolované všetky úseky. Tento prístup vychádza z predpokladu, že je rozumné pokrývať vedením práve často využívané úseky, čo potvrdzujú aj riešenia získané exaktným prístupom. Heuristika bola implementovaná ako rozšírenie do projektu, ktorý využívame na spracovanie vstupných dát v jazyku C#.

Na experimenty sme použili rovnaké dáta ako v časti 6.3.4. Výsledky získané pomocou tejto a ďalších heuristík porovnávame s riešeniami získanými pomocou substituovaného modelu úlohy, ktorý sme predstavili v časti 6.3.2. Použitie tohoto modelu sa ukázalo ako najvýhodnejšie z pomedzi preskúmaných exaktných spôsobov riešenia úlohy. Preto ho využívame na toto porovnanie. Pri exaktnom prístupe sú označené niektoré hodnoty znakom "\*" . V týchto prípadoch sa nejedná o optimálne riešenie, ale ide o najlepšie nájdené riešenie v stanovenom čase.

Tabuľky 6.20, 6.21 a 6.22 približujú výsledky optimalizácie datasetov pomocou pažravej heuristiky a tie porovnávajú s výsledkami získanými exaktným prístupom. Tabuľky sú rozdelené na tri časti, podľa jarného, letného a zimného scenára. Prvý stĺpec obsahuje názov datasetu, v druhom a treťom stĺpci sú uvedené hodnoty účelovej funkcie a následne ich rozdiel v percentách. Posledné dva stĺpce sú venované porovnaniu času výpočtov úlohy pomocou zvolených prístupov [19].

Z porovnania výsledkov môžeme vidieť, že riešenie úlohy pomocou pažravej heuristiky je možné. Hlavnou výhodou je krátky čas výpočtu aj pre veľké datasety. Keďže sa jedná o jednoduchú, základnú heuristiku, nie je zaručené nájdenie riešenia blízko optima. Jej prínos vidíme hlavne v tom, že s jej pomocou nájdeme rýchlo prípustné riešenie. Takéto riešenie je možné využiť ako vstupné riešenie pre niektorú z metaheuristík, alebo v prípade ak je riešenie potrebné najsť operatívne.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) pažravá	Rozdiel UF (%)	Čas (s) Exakt.	Čas (s) pažravá
Bus 1	6859	8382	22,20	1,35	0,01
Tbus 1	4911	5054	2,91	0,73	0,02
Bus 5	15109	19691	30,33	6,44	0,17
Tbus 5	6655	10275	54,40	3,01	0,08
Tbus ZA	8895	11394	28,09	67,25	0,74
Bus ZA	23198	27052	16,61	842,98	1,12
ZA	24434	28335	15,97	3254,21	2,92
ZA dva dni	*26976	29735	10,23	15585,50	3,12

**Tabuľka 6.20:** Výsledky a porovnanie exaktného a pažravého heuristického prístupu - jarný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) pažravá	Rozdiel UF (%)	Čas (s) Exakt.	Čas (s) pažravá
Bus 1	12308	14292	16,12	0,44	0,01
Tbus 1	7458	7595	1,84	0,45	0,01
Bus 5	25898	30947	19,50	6,72	0,16
Tbus 5	10669	15900	49,03	3,56	0,07
Tbus ZA	13653	16851	23,42	138,44	0,61
Bus ZA	42518	48088	13,10	157,91	1,09
ZA	*44471	48746	9,61	15591,10	2,63
ZA dva dni	*47100	50143	6,46	15610,40	3,15

**Tabuľka 6.21:** Výsledky a porovnanie exaktného a pažravého heuristického prístupu - letný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) pažravá	Rozdiel UF (%)	Čas (s) Exakt.	Čas (s) pažravá
Bus 1	13912	15701	12,86	0,50	0,01
Tbus 1	7685	7846	2,09	0,90	0,01
Bus 5	*27590	32121	16,42	9727,90	0,17
Tbus 5	*11184	16158	44,47	5082,86	0,06
Tbus ZA	*14114	16967	20,21	5985,44	0,61
Bus ZA	*46455	50617	8,96	15063,40	1,09
ZA	*47760	51313	7,44	15598,00	2,96
ZA dva dni	*49684	52587	5,84	15600,40	3,09

**Tabuľka 6.22:** Výsledky a porovnanie exaktného a pažravého heuristického prístupu - zimný scenár.

### 6.3.6 Metaheuristika Simulated Annealing

Metaheuristiky vo všeobecnosti umožňujú nájsť relatívne dobré riešenie optimalizačnej úlohy a na rozdiel od základných heuristik dokážu opustiť lokálne minimum, čo im umožňuje preskúmať väčšiu množinu riešení. Z mnohých možností, ktoré je možné implementovať sme zvolili Simulated Annealing. Tejto metaheuristike sme sa viac venovali v časti 4.2.4.

Heuristika bola implementovaná v jazyku C# ako súčasť, už spomínaného programu, ktorý využívame aj na spracovanie vstupných dát. Vstupné riešenie je získané pomocou už spomínanej pažravkej heuristiky. V jednotlivých iteráciách heuristiky Simulated Annealing využívame operáciu 1 - 1 výmeny na získavanie nových riešení. Táto operácia spočíva vo vyradení jedného zaradeného úseku a zaradení iného z množiny nezaradených prvkov. Ak je takéto riešenie prípustné a zároveň je akceptované podľa vzorca:

$$p(x', x, T) = e^{-(f(x')-f(x))/T},$$

tak je na toto riešenie opätovne aplikovaná pažravá heuristika. Toto zabezpečuje postupné znižovanie počtu pokrytých hrán a zároveň prehládanie ďalších podmnožín riešení. Metaheuristika končí po znížení teploty na minimálnu nastavenú úroveň. Pre lepší prehľad o jej implementácii uvádzame pseudokód.

```
while (teplota > teplota_min)
{
    while (nebol dosiahnutý počet iterácií)
    {
        priprav nové riešenie (1-1 výmena);
        vypočítaj hodnotu účelovej funkcie;

        if (nie je prípustné)
        {
            zahod pripravené riešenie;
        }
        else
        {
            if (prechod nie je možné akceptovať)
            {
                zahod pripravené riešenie;
            }
            else
            {
                vylepši riešenie pažravou heuristikou;
                vypočítaj hodnotu účelovej funkcie;
                aktualizuj doposiaľ najlepšie nájsené riešenie;
            }
        }
    }
    zníž teplotu (T = T * alfa);
}
```

Je všeobecne známe, že metaheuristiky sú citlivé na nastavenie vstupných parametrov. Z prvotných experimentov sa ukázalo, že najväčší vplyv má parameter  $T$ , teda teplota. Preto boli hodnoty ostatných parametrov zafixované na hodnotách v tabuľke 6.24 a vykonali sme sériu experimentov, po 10 behoch heuristiky. Využili sme jarný dataset so všetkými vozidlami v ZA. Výsledky experimentov s rôznymi hodnotami parametra  $T$  sú v tabuľke 6.23.

<b>T</b>	<b>UF (m) najnižšia</b>	<b>UF (m) priemer</b>	<b>Čas (s) priemer</b>
50	27601	27889	21,70
100	27198	27443	20,03
200	27189	27504	18,77
500	27037	27271	14,92
750	26909	27209	15,56
1000	26923	27215	16,84

**Tabuľka 6.23:** *Vplyv nastavenia hodnoty parametra  $T$  na výkon SA*

Na základe experimentov s nastavením hodnoty parametra  $T$  konštatujeme, že hodnota tohoto parametra má veľký vplyv na kvalitu získaných riešení. Pri nízkych hodnotách bola prevažná väčšina prechodov k susedným riešeniam zamietnutá, preto nebola prehľadaná dostatočná časť množiny prípustných riešení. Zvyšovanie hodnoty parametra malo zmysel až do hodnoty  $T = 750$ . Túto hodnotu sme zvolili pre vykonanie ďalších experimentov. Pri  $T = 1000$  už dosiahnuté zlepšenia neboli až tak vysoké. Okrem nájdených hodnôt účelových funkcií, sme pozorovali vplyv tohoto parametra aj na výpočtový čas. Najkratší bol pri  $T = 500$ . Vo zvolenej hodnote  $T = 750$ , je výpočtový čas stále priaznivo krátky. V tabuľke 6.24 sa nachádzajú výsledné hodnoty parametrov, ktoré sme využili pre vstupné nastavenie metaheuristiky, pre všetky nasledujúce experimenty.

<b>Parameter</b>	<b>Hodnota</b>
T	750
T_min	0,001
alfa	0,9
iterácie pred zmenou teploty	30

**Tabuľka 6.24:** *Výsledné použité hodnoty parametrov v heuristike*

Tabuľky 6.25, 6.26 a 6.27 obsahujú výsledky najlepšieho z 10 behov optimalizácie datasetov pomocou Simulated Annealing. To z dôvodu, že metaheuristika je ovplyvnená náhodou. Výsledky získané heuristicky následne porovnávame s výsledkami získanými exaktným prístupom.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) SA	Rozdiel UF (%)	Čas (s) Exakt.	Čas (s) SA
Bus 1	6859	7008	2,17	1,35	0,14
Tbus 1	4911	4928	0,35	0,73	0,22
Bus 5	15109	16327	8,06	6,44	1,00
Tbus 5	6655	7333	10,19	3,01	0,91
Tbus ZA	8895	9710	9,16	67,25	7,76
Bus ZA	23198	25607	10,38	842,98	6,93
ZA	24434	26909	10,13	3254,21	16,09
ZA dva dni	*26976	28125	4,26	15585,50	22,41

**Tabuľka 6.25:** Výsledky a porovnanie exaktného a SA metaheuristického prístupu - jarný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) SA	Rozdiel UF (%)	Čas (s) Exakt.	Čas (s) SA
Bus 1	12308	13050	6,03	0,44	0,11
Tbus 1	7458	7505	0,63	0,45	0,25
Bus 5	25898	29217	12,82	6,72	1,05
Tbus 5	10669	12305	15,33	3,56	0,83
Tbus ZA	13653	14786	8,30	138,44	7,75
Bus ZA	42518	46347	9,01	157,91	6,83
ZA	*44471	47000	5,69	15591,10	17,89
ZA dva dni	*47100	48958	3,94	15610,40	21,86

**Tabuľka 6.26:** Výsledky a porovnanie exaktného a SA metaheuristického prístupu - letný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) SA	Rozdiel UF (%)	Čas (s) Exakt.	Čas (s) SA
Bus 1	13912	14811	6,46	0,50	0,10
Tbus 1	7685	7755	0,91	0,90	0,20
Bus 5	*27590	30376	10,10	9727,90	0,90
Tbus 5	*11184	12573	12,42	5082,86	0,77
Tbus ZA	*14114	15075	6,81	5985,44	8,31
Bus ZA	*46455	49392	6,32	15063,40	6,16
ZA	*47760	50339	5,40	155980	16,61
ZA dva dni	*49684	51269	3,19	15600,40	21,15

**Tabuľka 6.27:** Výsledky a porovnanie exaktného a SA metaheuristického prístupu - zimný scenár.



Využitie metaheuristiky Simulated Annealing, na riešenie úlohy rozmiestňovania nabíjacích úsekov, je jedným z možných prístupov. Prezentované riešenia ukazujú, že metaheuristika umožňuje v krátkom čase nájsť prípustné riešenia úlohy. To ako blízko optima sa výsledné riešenie nachádza závisí od datasetu a rovnako aj od kvality vstupného riešenia.

V našom prípade boli ako vstupné riešenia použité tie, ktoré boli nájdené predošlou pažravou heuristikou. Pri tejto heuristiky bolo najbližšie optimu riešenie datasetu Tbus 1 pri všetkých scenároch. Tieto riešenia poskytli dobrý vstup do metaheuristiky. Aj pri ostatných datasetoch boli vstupné riešenia z pažravej heuristiky značne vylepšené pomocou Simulated Annealing. Pri veľkých datasetoch, ktoré obsahovali všetky vozidlá v meste Žilina, boli nájdené relatívne dobré riešenia a oproti exaktnému prístupu nastala veľká úspora času. Ak by bolo potrebné takúto úlohu riešiť operatívne, táto časová efektívnosť by poskytovala zaujímavú alternatívu k pomalším, ale presnejším prístupom.

### 6.3.7 Heuristika Kernel Search na základe lokačného modelu

Kernel Search je heuristika, ktorú je možné využiť na riešenie rôznych úloh lineárneho programovania. Viac sme sa jej venovali v časti 4.2.2. Ako základ sme zvolili substituovaný model úlohy. Najprv bola vyriešená LP relaxácia úlohy, čím sme získali prvé prípustné riešenie. Následne bolo vytvorené jadro a postupnosť skupín premenných. Počet skupín závisí od rozsahu úlohy. Algoritmus pokračuje riešením úlohy s jadrom. V zlepšovacej fáze je úloha riešená postupne aj s premennými, ktoré sa nachádzajú v skupinách. Podľa potreby sa jadro upravuje.

Do heuristiky Kernel Search takisto vstupuje množina parametrov. Tieto parametre boli nastavené vzhľadom na aktuálne riešenie úlohy na základe zistení z článku [38]. Keďže heuristika s týmito nastaveniami parametrov podávala dobré výsledky, ďalšie zmeny parametrov neprebíhali. Použité hodnoty parametrov sa nachádzajú v tabuľke 6.28.

Názov parametra	Hodnota
maximálny počet košov	25
veľkosť koša	100
počet iterácií pre vyradenie premennej s nulovou hodnotou	3
maximálne trvanie výpočtu LP relaxácie (s)	600
maximálne trvanie jednej optimalizácie v hlavnom cykle (s)	300

**Tabuľka 6.28:** Vstupné parametre pre heuristiku Kernel Search

Tabuľky 6.29, 6.30 a 6.31 obsahujú výsledky optimalizácie datasetov a porovnanie exaktného prístupu s heuristikou Kernel Search. Rovnako ako pri predošlých heuristikách tabuľky delíme podľa scenárov. V prvom stĺpci sa nachádza názov datasetu. Potom nasleduje hodnota účelovej funkcie. Pri exaktnom prístupe sú označené niektoré hodnoty znakom ”\*”. V týchto prípadoch sa nejedná o optimálne riešenie, ale o najlepšie nájdené riešenie v stanovenom čase. Tabuľky následne pokračujú stĺpcom, ktorý obsahuje rozdiel medzi nájdenými hodnotami účelovej funkcie v percentách. Posledné dva stĺpce sú venované porovnaniu času výpočtov úlohy pomocou zvolených prístupov [19].

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) KS	Rozdiel UF (%)	Čas (s) exakt.	Čas (s) KS
Bus 1	6859	6859	0,00	1,35	0,33
Tbus 1	4911	4911	0,00	0,73	0,39
Bus 5	15109	15112	0,02	6,44	9,41
Tbus 5	6655	6655	0,00	3,01	3,10
Tbus ZA	8895	8895	0,00	67,25	640,64
Bus ZA	23198	23214	0,07	842,98	783,47
ZA	24434	24437	0,01	3254,21	1558,66
ZA dva dni	*26976	26993	0,06	15585,50	2124,75

**Tabuľka 6.29:** Výsledky a porovnanie exaktného a heuristického prístupu - jarný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) KS	Rozdiel UF (%)	Čas (s) exakt.	Čas (s) KS
Bus 1	12308	12308	0,00	0,44	0,87
Tbus 1	7458	7458	0,00	0,45	0,36
Bus 5	25898	25898	0,00	6,72	13,26
Tbus 5	10669	10673	0,04	3,56	4,31
Tbus ZA	13653	13653	0,00	138,44	112,52
Bus ZA	42518	42570	0,12	157,91	1304,74
ZA	*44471	44592	0,27	15591,10	1816,19
ZA dva dni	*47100	47194	0,20	15610,40	1832,79

**Tabuľka 6.30:** Výsledky a porovnanie exaktného a heuristického prístupu - letný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	UF (m) KS	Rozdiel UF (%)	Čas (s) exakt.	Čas (s) KS
Bus 1	13912	13912	0,00	0,50	0,66
Tbus 1	7685	7685	0,00	0,90	0,76
Bus 5	*27590	27599	0,03	9727,90	547,52
Tbus 5	*11184	11184	0,00	5082,86	600,72
Tbus ZA	*14114	14114	0,00	5985,44	611,87
Bus ZA	*46455	46599	0,31	15063,40	1647,30
ZA	*47760	47860	0,21	15598,00	1814,03
ZA dva dni	*49684	49967	0,57	15600,40	1827,18

**Tabuľka 6.31:** *Výsledky a porovnanie exaktného a heuristického prístupu - zimný scenár.*

Podľa výsledkov v tabuľkách 6.29, 6.30 a 6.31 môžeme pozorovať isté trendy. Pri malých úlohách nie je zásadný rozdiel v tom, či použijeme heuristiku alebo exaktný spôsob riešenia úlohy. Vo väčšine prípadov bolo optimálne riešenie nájdené použitím oboch spôsobov. Pri väčších úlohách vidíme, že exaktným prístupom nebolo možné nájsť optimálne riešenia úloh. Z predošlých výsledkov ale vieme, že tieto riešenia sú blízko optima. V týchto prípadoch využitie heuristiky síce nájde o málo horšie riešenia, ale skrátí sa potrebný čas na ich nájdenie. Predpokladáme, že pri väčších úlohách by boli tieto trendy ešte výraznejšie [19].

### 6.3.8 Zhodnotenie

V tejto časti sme predstavili dva exaktné matematické lokačné modely na riešenie úlohy návrhu siete trolejových vedení pre parciálne trolejbusy. Tieto modely sú vhodnejšie na popisanie úlohy než predchádzajúci prechodový model. Z lokačných modelov sa po vzájomnom porovnaní ukazujú ako výhodnejšia substituovaná verzia. Týmto spôsobom vieme vyriešiť úlohu na dátach z mesta Žilina. Exaktný spôsob riešenia má ale svoje limitácie, preto sme úlohu riešili aj heuristicky. Preskúmali sme viaceré heuristiky, od jednoduchej primárnej pažravej metódy, cez metaheuristiku Simulated Annealing až po heuristiku Kernel Search. Práve posledný spomínaný spôsob sa ukázal ako veľmi vhodný a pomáha nájsť relatívne dobré riešenia pri väčších datasetoch za kratší čas. Ostatné heuristické metódy ponúkli výraznejšie skrátenie výpočtového času, ale zase nižšiu kvalitu výsledných riešení.

## 6.4 Zovšeobecnený model

Zadanie problému, ktorému sa venuje táto dizertačná práca vyžaduje, aby sme mali k dispozícii digraf cestnej siete a turnusy vozidiel. Predpokladá sa, že na úsekoch cestnej siete ešte nie sú vybudované trolejové vedenia a je možné takéto vedenia vybudovať všade. V mnohých mestách sa už nachádzajú ale vybudované úseky trolejového vedenia. Preto môže byť zaujímavá aj otázka, ako zistiť, či je toto vedenie už dostatočné pre nasadenie parciálnych trolejbusov. Ak nie je, tak je možné riešiť úlohu, pri ktorej vyberieme úseky na doplnenie existujúcej cestnej siete o nové vedenia. Už existujúce trolejové vedenia sa nachádzajú aj v meste Žilina, z ktorého dáta máme k dispozícii na overovanie riešení. Okrem toho miestne podmienky môžu znemožniť výstavbu vedení na niektorých úsekoch [22].

Z tohoto dôvodu sme na základe substituovaného modelu úlohy z časti 6.3.2 vytvorili zovšeobecnenú verziu modelu, kde je možné zadať úseky, na ktorých nie je možné vedenia vystavať, ďalej úseky, na ktorých sa vedenie už nachádza a nakoniec aj úseky, na ktorých je možná výstavba nových trolejových vedení. Táto úloha je mierne upravená oproti zadaniu práce, ale môže byť zaujímavá pre prípadné reálne využitie v praxi [22].

### 6.4.1 Formulácia zovšeobecneného modelu úlohy

Matematický model vzniká ako zovšeobecnená verzia substituovaného modelu úlohy. Kde  $y_i$  je rozhodovacia premenná o vybudovaní alebo nevybudovaní vedenia na úseku  $i$ , potom  $x_{rj+1}$  je rozhodovacia premenná o stave batérie vozidla  $r$  po prejdení úseku  $j$ . Ďalej  $B_{max}$  označuje maximálny stav batérie v  $kWh$ , respektíve  $B_{min}$  minimálny stav batérie v  $kWh$ . Následne  $CO$  je konštanta spotreby energie v  $kWh/m$  a  $CH$  je konštanta nabíjania z vedenia v  $kWh/m$ . Potom  $m$  je počet vozidiel (turnusov) a  $n$  je počet úsekov cesty,  $D_i$  je dĺžka úseku  $i$ ,  $a(r, j)$  je index  $j$ -teho úseku na trase vozidla  $r$  a  $q(r)$  je nakoniec počet úsekov v turnuse vozidla  $r$  [22].

Pre každé vozidlo  $r$  je zadaný počet  $q(r)$  ako počet úsekov v jeho turnuse. Vytvoríme podmnožiny  $J^0(r)$ ,  $J^1(r)$  a  $J^*(r)$ . Ak nie je možnosť nabíjania na danom segmente, tak platí, že  $j \in J^0(r)$ , ak je vedeniu na segmente už vybudované, tak  $j \in J^1(r)$  a v prípade, že o vybudovaní vedenia môžeme rozhodnúť, tak  $j \in J^*(r)$  [22].

Následne nech  $Q_{r,j}^0 = -CO \cdot D(a_{r,j})$  a  $Q_{r,j}^1 = CH \cdot D(a_{r,j})$ . Okrem toho definujeme  $Q_{r,j}^c + Q_{r,j}^v \cdot y(a_{r,j}) = -CO \cdot D(a_{r,j}) + (CO + CH) \cdot D(a_{r,j}) \cdot y(a_{r,j})$ .

$$\min \sum_{i=I^*} D_i \cdot y_i \quad (6.23)$$

Za podmienok:

$$z_{r,1} = B_{max} - B_{min} \quad r = 1..m. \quad (6.24)$$

$$z_{r,j+1} - z_{r,j} \leq Q_{r,j}^0 \quad r = 1..m; \quad j = 1..J^0(r). \quad (6.25)$$

$$z_{r,j+1} - z_{r,j} \leq Q_{r,j}^1 \quad r = 1..m; \quad j = 1..J^1(r). \quad (6.26)$$

$$z_{r,j+1} - z_{r,j} \leq Q_{r,j}^c + Q_{r,j}^v \cdot y(a_{rj}) \quad r = 1..m; \quad j = 1..J^*(r). \quad (6.27)$$

$$z_{r,j+1} \leq B_{max} - B_{min} \quad for \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.28)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad for \quad i \in I^*. \quad (6.29)$$

$$z_{r,j} \geq 0 \quad for \quad r = 1..m; \quad j = 1..q(r). \quad (6.30)$$

Zovšeobecnený model úlohy obsahuje nasledujúce podmienky. Účelová funkcia 6.23 zostáva podobná ako v predošlých modeloch, teda minimalizuje náklady na vybudovanie úsekov vedenia. Rozdielom je, že berie do úvahy len tie úseky, o ktorých je možné rozhodovať. Podmienka 6.24 udáva počiatočný stav batérie na začiatku turnusu. Podmienka 6.25 vypočítava spotrebu na úseku, ktorý nemôže byť pokrytý vedením. Ďalej podmienka 6.26 vypočítava nabíjanie na úsekoch, ktoré už sú pokryté vedením. Číslo 6.27 označuje podmienku, ktorá sa stará o výpočet spotreby, respektíve dobíjania pre tú množinu úsekov, o ktorej môžeme rozhodovať. Podmienka 6.28 označuje rozsah nabitia, aký môže nadobúdať batéria počas jazdy. Obligatórne podmienky sú označené 6.29 a 6.30 [22].

## 6.4.2 Porovnanie zovšeobecného a lokačného modelu úlohy

Na začiatku sme sa zamerali na overenie funkčnosti zovšeobecného modelu úlohy. Na porovnanie sme zvolili výber z testovacích úloh, ktoré sme používali aj pri testovaní predošlých modelov. Zovšeobecným modelom úlohy je možné jednoducho vyriešiť aj pôvodnú úlohu a to tak, že dátové súbory sa rozšíria o požadované množiny indexov  $I^*$  a  $J^*(r)$ , ktoré obsahujú všetky indexy, respektíve o množiny  $J^0(r)$  a  $J^1(r)$ , ktoré zostanú prázdne.

Dataset	UF (m) Subst.	UF (m) Zovš.	Čas (s) Subst.	Čas (s) Zovš.
Bus 1	6859	6859	1,35	0,24
Bus 5	15109	15109	6,44	4,05
Bus ZA	23198	23198	842,98	365,23
ZA	24434	24434	3254,40	2481,50

**Tabuľka 6.32:** Výsledky a porovnanie substituovaného a zovšeobecného - jarný scenár.

Dataset	UF (m) Subst.	UF (m) Zovš.	Čas (s) Subst.	Čas (s) Zovš.
Bus 1	12308	12308	0,44	0,41
Bus 5	25898	25898	6,72	6,04
Bus ZA	42518	42518	157,91	168,16
ZA	44471	44471	15591,10	15589,70

**Tabuľka 6.33:** Výsledky a porovnanie substituovaného a zovšeobecného - letný scenár.

Dataset	UF (m) Subst.	UF (m) Zovš.	Čas (s) Subst.	Čas (s) Zovš.
Bus 1	13912	13912	0,50	0,23
Bus 5	27590	27590	9727,90	34,92
Bus ZA	46455	46455	15063,40	15061,20
ZA	47760	47760	15598,00	15589,60

**Tabuľka 6.34:** Výsledky a porovnanie substituovaného a zovšeobecného - zimný scenár.

V tomto porovnaní očakávame, že budú nájdené rovnaké riešenia ako pri využití substituovaného modelu za podobný čas. V tabuľkách 6.32, 6.33

a 6.34 sa nachádzajú hodnoty účelových funkcií a výpočtové časy. Môžeme vidieť, že pomocou oboch modelov boli nájdené rovnaké riešenia a výpočtové časy boli rádovo podobné. Pri riešení niektorých benchmarkov bol zovšeobecnený model úlohy dokonca o niečo rýchlejší.

### 6.4.3 Riešenie úlohy doplnenia existujúcej siete trolejových vedení pomocou zovšeobecneného modelu

Ako už bolo spomenuté, zovšeobecnený model úlohy predstavujeme z dôvodu, že predstavuje spôsob, ako zohľadniť existujúci stav cestnej siete. V tomto prípade sme sa rozhodli testovať úlohu, v ktorej dopĺňame existujúce trolejové vedenia v meste Žilina. Z toho dôvodu sme vylúčili tie testovacie úlohy, ktoré obsahovali čisto trolejbusové turnusy. Súbor s dátami boli doplnené o množiny indexov  $I^*$ ,  $J^*(r)$  a  $J^1(r)$  podľa toho, kde sa v meste reálne trolejové vedenia nachádzajú. Množina  $J^0(r)$  zostáva aj v tomto prípade prázdna, lebo nemáme informácie o úsekoch, na ktorých by bolo budovanie vedenia úplne zakázané. Ak by sa takéto úseky vyskytli, je možné riešiť aj takúto úlohu.

V tabuľke 6.35 sa nachádzajú získané hodnoty účelových funkcií, čas výpočtu a percento pokrytia trasy vedením.

Dataset	Scenár	UF (m)	Čas (s)	Pokrytie (%)
Bus 1	jar	0	0,01	0,00
	leto	0	0,04	0,00
	zima	866	0,03	2,12
Bus 5	jar	1813	971,50	1,81
	leto	8279	0,72	8,20
	zima	9439	999,56	9,44
Bus ZA	jar	8639	15588,60	4,06
	leto	23449	15589,10	11,03
	zima	26286	15587,20	12,36
ZA	jar	8639	15589,70	4,06
	leto	23449	15587,10	11,03
	zima	26286	15590,30	12,36

**Tabuľka 6.35:** Zovšeobecnený model - výsledky

Dataset "Bus 1" je turnus autobusu, ktorý jazdí prevažne na linke 50, teda nočný spoj. Nočný spoj jazdí po najvyťaženejších trasách v meste, ktoré sú prevažne pokryté trolejovým vedením. Okrem toho toto vozidlo obsluhuje aj v menšej miere linku 25, čo je zmluvná preprava do automobilky pri Žiline.

Táto trasa vedie zväčša po úsekoch, ktoré nie sú pokryté trolejovým vedením. V jarnom a letnom scenári by bolo možné na tento turnus nasadiť parciálny trolejbus bez nutnosti rozšírenia vedenia. V zimnom scenári by bolo nutné vybudovať vedenia na istej časti trasy.

Dataset "Bus 5" už dosahuje 5 turnusov autobusov, na rôznych linkách. Preto je nutné doplnenie vedenia. Pre jarný a zimný scenár nebolo nájdené exaktné riešenie v stanovenom čase.

Zaujímavosťou sú scenáre "Bus ZA" a "ZA". Všimli sme si, že riešenie je v tomto prípade rovnaké. Scenár "Bus ZA" obsahuje všetky turnusy, ktoré sú obsluhované autobusmi v Žiline. Zatiaľ čo v scenári "ZA" sa do tejto množiny pridávajú aj turnusy trolejbusov. Trasy, po ktorých trolejbusy jazdia, sú prirodzene pokryté vedením a preto ich zaradenie do optimalizácie nespôsobí žiadnu zmenu. Tento fakt môžeme do budúcnosti využívať pri redukcii rozsahu úlohy.

#### 6.4.4 Zhodnotenie

Zovšeobecnený model úlohy je vhodným rozšírením zadania dizertačnej práce. Pomocou neho je možné riešiť úlohu, tak ako bola definovaná. Okrem toho ponúka možnosť, ako vziať do úvahy stav cestnej siete. Úseky je možné rozdeliť na také, o ktorých pokrytí trolejovým vedením rozhodujeme, ďalej na také, kde už trolejové vedenie vybudované je a nakoniec také, kde je možné na úsekoch výstavbu aj zakázať. Na vykonaných experimentoch sme tieto možnosti demonštrovali.

### 6.5 Overenie robustnosti riešení

V našom výskume sme sa zamerali na návrh algoritmov na riešenie úlohy rozmiestňovania trolejových vedení. Ako vstupné parametre bola použitá priemerná spotreba a rýchlosť nabíjania takéhoto druhu vozidiel. Hodnoty boli založené na pozorovaní reálnych vozidiel v premávke [2]. Hodnoty sme testovali v troch scenároch a to jarnom, letom a zimnom.

Vo všeobecnosti sa pri overovaní robustnosti riešení vychádza z faktu, že podmienky nie sú vždy jednoznačné. V optimalizovaných systémoch vždy vzniká istý faktor neistoty. Preto je potrebné rátať s tým, že môže nastať najhorší scenár. Za robustné riešenie môže byť považované také, pri ktorom systém funguje práve v prípade, že takýto scenár nastane [5], [13].

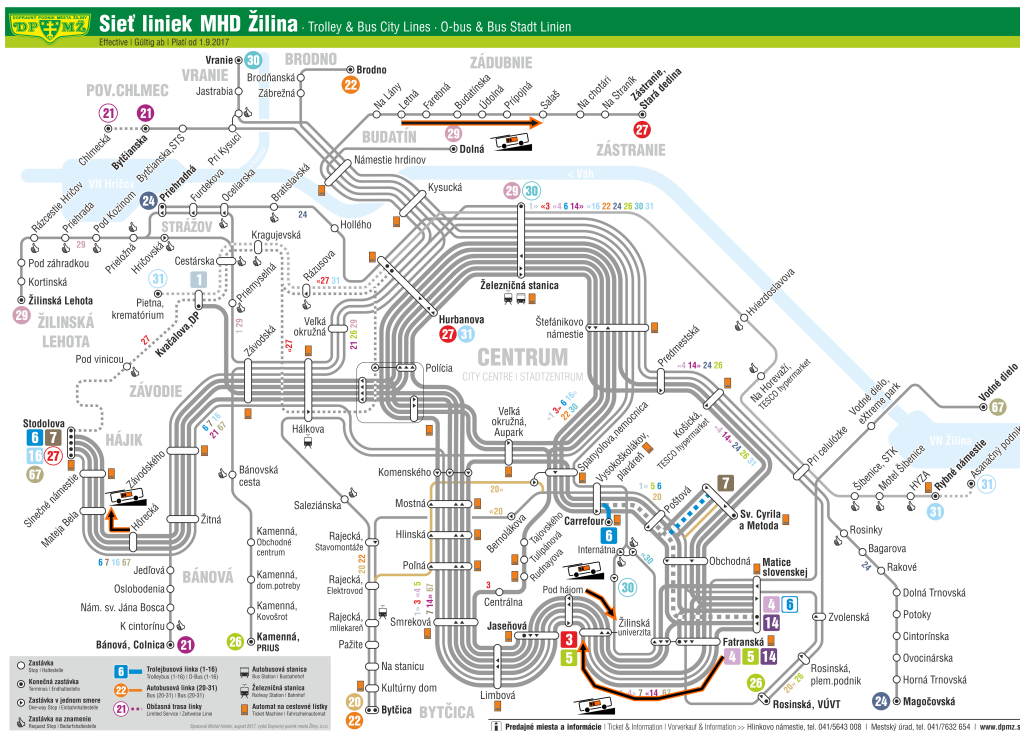
V reálnej premávke na jazdu vozidla vplýva veľa rôznych vonkajších faktorov. Môže sa jednať napríklad o zápchy, obchádzky, tiahle stúpania, či klesania. V extrémnom prípade môžu tieto faktory mať veľký vplyv na spot-



rebu, ktorý nie je obsiahnutý v priemerných hodnotách spotreby. Preto sme sa rozhodli navrhnúť spôsob, akým je možné získané riešenia overiť aj v prípade zvýšených nárokov na energiu.

### 6.5.1 Spôsob a nastavenie prepočtu robustnosti riešení

Na overenie robustnosti riešenia je vo všeobecnosti možné použiť napríklad simulačný model. V našom prípade sme sa rozhodli použiť veľmi zjednodušený model, ktorý bude overovať kvalitu dosiahnutých riešení pri doplnení niektorých ďalších parametrov na cestnej sieti, ako je napríklad sklon úseku, čo môže výrazným spôsobom ovplyvniť spotrebu energie na prekonanie takéhoto úseku.



Obrázok 6.7: Ilustrácia segmentov so stúpaniami.

Postup overenia robustnosti zjednodušeným modelom bol taký, že sme na upravenej cestnej sieti postupne testovali jednotlivé turnusy a sledovali sme, či na niektorých úsekoch nedôjde k poklesu stavu nabitia batérie pod minimálnu prípustnú úroveň. Ak k takejto situácii došlo, daný turnus nie je prípustným. Zároveň sme vyhodnocovali aj dĺžku časti turnusu, ktorá je neprípustná.

Robustnosť riešení sme sa rozhodli overiť pre datasety, ktoré používame pri väčšine numerických experimentov a ktoré boli predstavené v tabulke 6.5. Riešenia používame tie, ktoré boli nájdené pomocou exaktného prístupu s využitím substituovaného modelu.

Na sieti mesta Žilina sme vybrali tie úseky, ktoré majú najvýraznejšie stúpanie. Vybrané úseky sa nachádzajú na obrázku 6.7. Pre tieto úseky sme testovali dve rôzne úrovne zvýšenia spotreby energie. A to pri väčšom zvýšení spotreby o  $0,0013 \text{ kWh/m}$  respektíve pri menšom zvýšení o  $0,00065 \text{ kWh/m}$ .

### 6.5.2 Testovanie robustnosti riešení

V tabulkách 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40 a 6.41 sa nachádzajú výsledky experimentov s overovaním robustnosti riešení. Tabuľky začínajú stĺpcom s názvom datasetu a hodnotou účelovej funkcie, ktorú sme získali exaktným výpočtom pomocou substituovaného lokačného modelu úlohy. Ďalšie dva stĺpce tabuliek obsahujú počet prípustných respektíve neprípustných turnusov. V posledných stĺpcoch tabuliek uvádzame priemer neprípustných častí turnusov a aj maximálnu hodnotu.

Tabuľky sú delené podľa troch scenárov. Ďalej delíme tabuľky aj podľa hodnoty, o ktorú bola v danom prípade zvýšená spotreba v stúpaní.

Na základe vykonaných experimentov sme zistili, že na zmenu parametrov v cestnej sieti sú viac citlivé výsledky s použitým jarným scenárom. Je to spôsobené tým, že v rámci tohto scenára je vo všeobecnosti vybudovaných menej úsekov trolejového vedenia, čo má za následok viac neprípustných scenárov pri overovaní robustnosti takýchto riešení.

V praxi by takýto prepočet mohol byť použitý, okrem stúpaní, napríklad aj pri úsekoch v cestnej sieti, na ktorých môžu vznikáť zápchy. Týmto spôsobom je možné identifikovať turnusy, v ktorých hrozí strata energie. Na tieto turnusy môžu byť nasadené vozidlá s väčšou batériou, prípade môže byť posilnená samotná sieť trolejových vedení.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prí- pustné turnusy	Neprí- pustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	6859	0	1	27,96	27,96
Tbus 1	4911	0	1	10,08	10,08
Bus 5	15109	4	1	2,66	13,29
Tbus 5	6655	2	3	12,92	39,97
Tbus ZA	8895	15	15	9,01	54,67
Bus ZA	23198	23	7	8,70	77,79
ZA	24434	40	20	6,48	77,00

**Tabuľka 6.36:** Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m - jarný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prí- pustné turnusy	Neprí- pustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	6859	0	1	23,36	23,36
Tbus 1	4911	0	1	4,07	4,07
Bus 5	15109	4	1	1,53	7,64
Tbus 5	6655	2	3	6,17	21,59
Tbus ZA	8895	21	9	4,30	35,34
Bus ZA	23198	23	7	4,84	63,74
ZA	24434	47	13	2,84	62,40

**Tabuľka 6.37:** Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.00065 kWh/m - jarný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prí- pustné turnusy	Neprí- pustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	12308	0	1	4,01	4,01
Tbus 1	7458	0	1	24,79	24,79
Bus 5	25898	4	1	1,59	7,92
Tbus 5	10669	0	5	13,21	29,90
Tbus ZA	13653	14	16	7,46	36,98
Bus ZA	42518	21	9	7,91	76,25
ZA	44471	50	10	4,85	74,26

**Tabuľka 6.38:** Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m - letný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prí- pustné turnusy	Neprí- pustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	12308	0	1	1,64	1,64
Tbus 1	7458	0	1	13,34	13,34
Bus 5	25898	4	1	0,77	3,85
Tbus 5	10669	1	4	4,77	9,70
Tbus ZA	13653	20	10	1,72	12,30
Bus ZA	42518	23	7	2,61	37,28
ZA	44471	53	7	1,22	37,51

**Tabuľka 6.39:** Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.00065 kWh/m - letný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prí- pustné turnusy	Neprí- pustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	13912	0	1	28,26	28,26
Tbus 1	7685	0	1	32,65	32,65
Bus 5	27590	4	1	1,5	7,5
Tbus 5	11184	0	5	18,86	40,08
Tbus ZA	14114	11	19	10,6	52,25
Bus ZA	46455	23	7	11,04	86,11
ZA	47760	45	15	7,86	84,54

**Tabuľka 6.40:** Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m - zimný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prí- pustné turnusy	Neprí- pustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	13912	0	1	9,61	9,61
Tbus 1	7685	0	1	20,05	20,05
Bus 5	27590	4	1	1,03	5,13
Tbus 5	11184	0	5	6,13	10,04
Tbus ZA	14114	17	13	2,62	23,67
Bus ZA	46455	24	6	4,75	36,94
ZA	47760	47	13	2,64	43,47

**Tabuľka 6.41:** Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.00065 kWh/m - zimný scenár.

# Kapitola 7

## Záver

Predstavená dizertačná práca sa zameriava na riešenie úlohy vytvorenia minimálnej siete trolejového vedenia, ktorá by bola dostatočná na prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov. Jedná sa teda o umiestňovaciu úlohu na hranách dopravnej siete.

Prvým cieľom práce bola formulácia matematického modelu úlohy. Riešennú úlohu sme popísali viacerými matematickými modelmi, ktoré sme overili experimentami na reálnej dopravnej sieti mesta Žilina. Úlohy použité na overenie rozsahu riešiteľnosti boli rôzneho rozsahu. Týmto sme získali spôsob, ako danú úlohu riešiť exaktne, pomocou prostriedkov matematického programovania.

Následne sme zvolili a implementovali základnú heuristiku, heuristický algoritmus Kernel Search a metaheuristiku Simulated Annealing. Tieto algoritmy boli rovnako testované na dostupných dátach rôzneho rozsahu. Ich výkonnosť a vlastnosti sme porovnali s najlepším z predstavených matematických modelov úlohy.

Nakoniec sme predstavili zovšeobecnený model úlohy, pomocou ktorého dokážeme lepšie zohľadniť aktuálny stav infraštruktúry. Toto je možné vďaka tomu, že umožňuje rozdeliť hrany na množiny, podľa toho, či už daná hrana je pokrytá vedením, vedenie nemôže byť postavené, alebo na hrane je možná výstavba. Funkčnosť modelu sme dokázali riešením testovacích úloh.

Na záver sme overili robustnosť riešení pomocou zjednodušeného modelu, v ktorom sme menili parametre niektorých úsekov siete. Výsledky sme porovnávali s výsledkami dosiahnutými pomocou exaktných modelov. Na základe vykonaných experimentov sme dospeli k záveru, že na zmenu parametrov v cestnej sieti sú viac citlivé výsledky s použitým jarným scenárom.

Z týchto dôvodov považujeme ciele dizertačnej práce za splnené. Téma výskumu efektívnych algoritmov pre návrh siete nabíjacej infraštruktúry elektro-vozidiel vo verejnej doprave je zaujímavá. Danú tému sme ale považo-

vali za nedostatočne preskúmanú. Preto táto dizertačná práca a jej čiastkové výsledky publikované vo vedeckých článkoch, vhodne dopĺňajú poznatky o riešení podobných úloh. Je prepojením informatiky, špecificky oblasti návrhu optimalizačných algoritmov s problematikou nasadzovania moderných a ekologických alternatív v hromadnej doprave. Výsledky dizertačnej práce môžu pomôcť pri návrhu riešení, ktoré budú mať potenciál následného využitia pri plánovaní výstavby trolejových vedení pre parciálne trolejbusy. Predpokladáme, že záujem o nasadzovanie parciálnych trolejbusov v hromadnej doprave bude narastať [16], [20].

## 7.1 Záverečné odporúčania pre ďalšiu prácu

Počas výskumu, ktorý súvisí s dizertačnou prácou, sme mali k dispozícii dáta o turnusoch vozidiel v meste Žilina. Ak by to bolo možné, radi by sme vytvorili rozsiahlejšie testovacie úlohy na väčších mestách. Jedná sa o špecifické dáta, ktoré nie sú obvykle verejne dostupné. Potrebné sú dáta o turnusoch jednotlivých vozidiel a aj o ich servisných jazdách. Pre získanie takýchto dát bude potrebné osloviť dopravné podniky, prípadne univerzity pôsobiace vo väčších mestách, pravdepodobne v zahraničí.

Ako potencionálne prínosný spôsob riešenia podobných úloh by mohla byť využitá dekompozícia grafu cestnej siete na menšie časti. Graf cestnej siete môže obsahovať komponenty, ktoré môžu byť nájdené pomocou artikulácie. Týmto spôsobom by mohla byť úloha riešená ako množina podproblémov.

Využitie simulačného nástroja OptSim sa ukázalo ako neľahká úloha. S jeho pomocou sme boli schopní vygenerovať vstupné dáta. Tento nástroj ale primárne poskytuje podrobnú agentovú simuláciu vozidiel hromadnej dopravy. Je vyvíjaný na Fakulte riadenia a informatiky v Žiline, prevažne študentami, ako súčasť projektovej výučby. Do budúca bude potrebné túto funkcionálnu dokončiť tak, aby mohli byť nami získané riešenia presnejšie simulačne overené. S jeho pomocou by mala byť umožnená aj vizualizácia výsledných riešení.

V práci sme sa obmedzili na riešenie úloh strategického plánovania dopravnej siete. Predpokladáme, že pomocou zovšeobecneného modelu úlohy by bolo možné riešiť aj úlohy operatívneho plánovania, ako napríklad nasadenie parciálnych trolejbusov pri výpadkoch prúdu v časti vedenia, alebo obchádzky spôsobené dopravnou situáciou, či opravami ciest. Na tento účel by mohli slúžiť práve heuristické algoritmy, ktoré boli predstavené v tejto práci. Ich výhodou je, že poskytujú relatívne dobré a hlavne prípustné riešenia úlohy v krátkom čase.

# Bibliografia

1. ADAMKO, Norbert. Prezentácia pre študentov predmetu: Modelovanie a simulácia. *Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Katedra matematických metód a operačnej analýzy*. 2016.
2. BARTŁOMIEJCZYK, Mikołaj. Practical application of in motion charging: Trolleybuses service on bus lines. *2017 18th International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE)*. 2017, s. 1–6. Dostupné z DOI: 10.1109/EPE.2017.7967239.
3. BARTŁOMIEJCZYK, Mikołaj; STÝSKALA, Vítězslav; HRBAC, Roman; POŁOM, Marcin. Trolleybus with traction batteries for autonomous running. 2013.
4. BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*. 1999, roč. 25, č. 1, s. 1–13. ISSN 0167-6377. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(99\)00016-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(99)00016-4).
5. BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*. 1999, roč. 25, č. 1, s. 1–13. ISSN 0167-6377.
6. BENDÍK, Ján. *Navrhovanie verejných obslužných systémov s exaktným optimalizačným jadrom*. Žilina, Slovensko, 2016. Dostupné tiež z: [https://www.fri.uniza.sk/uploads/phd/42f-Dizerta%5C%C4%5C%8Dn%5C%C3%5C%A1\\_pr%5C%C3%5C%A1ca\\_BENDIK.pdf](https://www.fri.uniza.sk/uploads/phd/42f-Dizerta%5C%C4%5C%8Dn%5C%C3%5C%A1_pr%5C%C3%5C%A1ca_BENDIK.pdf). Dizertačná práca. Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy. Kód: 28360020163003.
7. BERGK, Fabian; BIEMANN, Kirsten; LAMBRECHT, Udo; PÜTZ, Ralph; LANDINGER, Hubert. Potential of In-Motion Charging Buses for the Electrification of Urban Bus Lines. *Journal of Earth Sciences and Geotechnical Engineering*. 2016, roč. 6, s. 347–362. ISSN 1792-9040. Scienpress Ltd.

8. DALFÓ, Cristina. *Estudi i disseny de grans xarxes d'interconnexió: modularitat i comunicació*. 2008.
9. DPMŽ. *O spoločnosti: Dopravný podnik mesta Žiliny s.r.o.* 2016. Dostupné tiež z: <http://www.dpmz.sk/o-spolocnosti/>. [online cit. 19.12.2020].
10. DPMŽ. *Úspešná skúšobná prevádzka parciálnych trolejbusov*. 2020. Dostupné tiež z: <http://www.dpmz.sk/n684/>. [online cit. 10.04.2021].
11. ERLKOTTER, Donald. A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location. *Operations Research*. 1978, roč. 26, č. 6, s. 992–1009. ISSN 0030364X, ISSN 15265463. Dostupné tiež z: <http://www.jstor.org/stable/170260>.
12. FRELING, Richard; WAGELMANS, Albert P. M.; PAIXÃO, José M. Pinto. Models and Algorithms for Single-Depot Vehicle Scheduling. *Transportation Science*. 2001, roč. 35, s. 107–213. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1287/trsc.35.2.165.10135>.
13. GOBERNA, M.A.; JEYAKUMAR, V.; LI, G.; VICENTE-PÉREZ, J. Robust solutions to multi-objective linear programs with uncertain data. *European Journal of Operational Research*. 2015, roč. 242, č. 3, s. 730–743. ISSN 0377-2217.
14. GÖHLICH, D.; KUNITH, A.; LY, T. Technology Assessment Of An Electric Urban Bus System For Berlin. *WIT Transactions on The Built Environment*. 2014, roč. 138, s. 13. Dostupné z DOI: <http://dx.doi.org/10.2495/UT140121>. ISBN: 9781845647780.
15. GRYGAR, Dobroslav. *Efektívne algoritmy pre návrh siete nabíjacej infraštruktúry elektrovozidiel vo verejnej doprave*. Žilina, Slovensko, 2018. Rámcový projekt. Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód.
16. GRYGAR, Dobroslav. Exaktný prístup na návrh minimálnej siete pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov. *Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XIII, Zuberec*. 2019. ISBN: 978-80-225-6417-1.
17. GRYGAR, Dobroslav; FABRICIUS, René. An Efficient Adjustment of Genetic Algorithm for Pareto Front Determination. *Transportation Research Procedia*. 2019, roč. 40, s. 1335–1342. ISSN 2352-1465. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.07.185>. TRANSCOM 2019 13th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport.



18. GRYGAR, Dobroslav; JANACEK, Jaroslav; KOHÁNI, Michal; FABRICIUS, Rene. Two objective public service system design problem. *COMMUNICATIONS – Scientific Letters of the University of Žilina*. 2021. V tlači.
19. GRYGAR, Dobroslav; JÁNOŠÍKOVÁ, Eudmila; JANKOVIČ, Peter; KOHÁNI, Michal. Kernel Search for Overhead Wires Network Planning for Battery-assisted Trolleybuses. *Transportation Research Procedia*. 2021. TRANSCOM 2021 14th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport, V tlači.
20. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Covering of the Battery Assisted Trolleybus Fleet Schedules by Minimal Overhead Wires Network. *The 13th International Conference on Multiple Objective Programming and Goal Programming (MOPGP), Marrakech, Morocco*. 2019.
21. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Data conversion and exact approach to overhead wires network minimisation for the battery assisted trolleybus fleet. *The 15th International Symposium on Operations Research in Slovenia | 25th – 27th September 2019, Bled, Slovenia*. 2019.
22. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Generalized Location-based Linear Model for Overhead Wires Network Planning for Battery-assisted Trolleybuses. *INES, IEEE 25th International Conference on Intelligent Engineering Systems*. 2021. Podané.
23. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Linear model adjustment and approximate approach for creating minimal overhead wires network for vehicle schedules. *ICORES 2020 - Proceedings of the 9th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems, Pages 187-193*. 2020. Faculty of Management Science and Informatics, University of Zilina, Slovakia.
24. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal; ŠTEFÚN, Rastislav; DRGOŇA, Peter. Analysis of limiting factors of battery assisted trolleybuses. *Transportation Research Procedia*. 2019, roč. 40, s. 229–235. ISSN 2352-1465. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.07.035>. TRANSCOM 2019 13th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport.
25. GUASTAROBA, G.; SAVELSBERGH, M.; SPERANZA, M.G. Adaptive Kernel Search: A heuristic for solving Mixed Integer linear Programs. *European Journal of Operational Research*. 2017, roč. 263, č. 3, s. 789–804. ISSN 0377-2217. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.06.005>.

26. GUASTAROBA, G.; SPERANZA, M.G. A heuristic for BILP problems: The Single Source Capacitated Facility Location Problem. *European Journal of Operational Research*. 2014, roč. 238, č. 2, s. 438–450. ISSN 0377-2217. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.04.007>.
27. HE, Fang; CHEN, Zhibin; YIN, Yafeng. Optimal deployment of charging lanes for electric vehicles in transportation networks. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2016, roč. 91, s. 344–365. ISSN 0191-2615. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2016.05.018>.
28. INEICHEN, Yves; CHERNOSKUTOV, Mikhail; BEKAS, Costas. Heuristic Algorithm for Approximation Betweenness Centrality Using Graph Coarsening. *Procedia Computer Science*. 2015, roč. 66, s. 83–92. ISSN 1877-0509. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.11.011>. 4th International Young Scientist Conference on Computational Science.
29. JANÁČEK, Jaroslav. *Matematické programování. Druhé opravené vydanie, Žilina*. EDIS –vydavateľstvo ŽU, 2003. ISBN: 80-8070-054-0.
30. JANÁČEK, Jaroslav. *Optimalizace na dopravních sítích*. Vysokoškolské učebnice (Žilinská univerzita), 2002. SBN 80-8070-031-1.
31. JANÁČEK, Jaroslav. Prezentácia pre študentov predmetu: Metaheuristiky. *Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Katedra matematických metód a operačnej analýzy*. 2019.
32. JANÁČEK, Jaroslav; BUZNA, Luboš. An acceleration of Erlenkotter-Körkel's algorithms for uncapacitated facility location problem. *Annals of Operations Research*. 2008, roč. 164, č. 1, s. 97–109. ISSN 0254-5330.
33. JANÁČEK, Jaroslav; KOHÁNI, Michal; SZENDREYOVÁ, Alžbeta; BUZNA, Luboš. *Diskrétna optimalizácia*. EDIS vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2015. Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Katedra matematických metód a operačnej analýzy.
34. JANÁČEK, Jaroslav; KOVAČIKOVÁ, Johana. Porovnanie prístupov založených na duálnom prístupe pre riešenie umiestňovacích úloh. *Komunikácie - Vedecké listy Žilinskej univerzity*. 1999, s. 4–8. Vydanie: 2/99.
35. JANÁČEK, Jaroslav; ŠIRC, Jan. Prezentácia Generování linek při zákazu dvojcyklů a zohlednění hlavních přepravních proudů. *Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Katedra matematických metód a operačnej analýzy*. 2010.

36. JANÁČEK, Jaroslav; ŠIRC, Jan. The column generation technique for public transport line planning by ip-solver. 2010, roč. 12, s. 60–64.
37. JÁNOŠÍKOVÁ, Ludmila. Prezentácia z predmetu Modelovanie a optimalizácia - Metóda vetiev a hraníc (Branch and Bound Method) na riešenie úloh celočíselného lineárneho programovania. *Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Katedra matematických metód a operačnej analýzy*. 2009. Dostupné tiež z: [http://frdsa.utc.sk/~janosik/Vyuka/M0\\_pred7.pdf](http://frdsa.utc.sk/~janosik/Vyuka/M0_pred7.pdf).
38. JÁNOŠÍKOVÁ, Ludmila; JANKOVIČ, Peter. Emergency Medical System Design Using Kernel Search. 2018.
39. JENKINS, Jeffrey. A closer look at energy consumption in EVs. *CHARGED, Electric Vehicles Magazine, under Features, Tech Features*. 2018. Dostupné tiež z: <https://chargedevs.com/features/a-closer-look-at-energy-consumption-in-evs/>. [online cit. 23.08.2019].
40. KAMI. *Jazykové okienko: linka nerovná sa spoj*. 2013. Dostupné tiež z: <https://imhd.sk/bb/doc/sk/11982/Jazykove-okienko-linka-nerovna-sa-spoj>. [online cit. 27.11.2020].
41. KHARCHENKO, Viktor; KOSTENKO, Ivan; LIUBARSKYI, Borys; SHAIDA, Viktor; KURAVSKYI, Maksym; PETRENKO, leksandr. Simulating the traction electric drive operation of a trolleybus equipped with mixed excitation motors and a DC-DC converter. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020, roč. 3, s. 46–54. Dostupné z DOI: 10.15587/1729-4061.2020.205288.
42. KOHÁNI, Michal. *Implementácia optimalizačných algoritmov - Prednáška č.2* [Prezenrácia pre študentov FRI]. 2013. Fakulta riadenia a informatiky ŽU.
43. KOHÁNI, Michal. *Optimalizácia návrhu štruktúry komunikačného systému "od mnohých k mnohým"*. Žilina, Slovensko, 2007. Dizertačná práca. Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy.
44. KOHÁNI, Michal; JANKOVIČ, Peter. *OptSim - softvérový nástroj na návrh dopravných systémov*. 2019. Dostupné tiež z: <https://www.fri.uniza.sk/ing-projekty/ing-projekty2/show/322>. [online cit. 22.08.2019].

45. KUNITH, Alexander; MENDELEVITCH, Roman; GOEHLICH, Dietmar. Electrification of a city bus network—An optimization model for cost-effective placing of charging infrastructure and battery sizing of fast-charging electric bus systems. *International Journal of Sustainable Transportation*. 2017, roč. 11, č. 10, s. 707–720. Dostupné z DOI: 10.1080/15568318.2017.1310962.
46. MAŠURIK, Martin. *Heuristiky a metaheuristiky*. Bratislava, Slovenská republika, 2015. Dostupné tiež z: <http://www.dcs.fmph.uniba.sk/bakalarky/obhajene/getfile.php/Bakal%5C%E1rska+pr%5C%E1ca+final.pdf?id=284%5C&fid=554%5C&type=application%5C%2Fpdf>. Bakalárska práca. Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra informatiky.
47. MEGHANATHAN, Natarajan. Use of Eigenvector Centrality to Detect Graph Isomorphism. *Computer Science & Information Technology*. 2015, roč. 5. Dostupné z DOI: 10.5121/csit.2015.51501.
48. MOLNAROVA, Ellmo. *Informatika ako veda*. 2014. Dostupné tiež z: <https://ellmo.estranky.sk/clanky/informatika-ako-veda/informatika-ako-veda.html>. [online cit. 24.11.2020].
49. MONTOYA, Alejandro; GUÉRET, Christelle; MENDOZA, Jorge E.; VILLEGAS, Juan G. The electric vehicle routing problem with nonlinear charging function. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2017, roč. 103, s. 87–110. ISSN 0191-2615. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2017.02.004>. Green Urban Transportation.
50. NOCEDAL, Jorge; J.WRIGHT, Stephen. *Numerical Optimization (2nd ed.)* Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006. ISBN: 978-0-387-30303-1.
51. PALÚCH, Stanislav. Prezentácia pre študentov predmetu: Algoritmická teória grafov. *Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Katedra matematických metód a operačnej analýzy*. 2019.
52. PIETRZAK, Oliwia; PIETRZAK, Krystian. The Economic Effects of Electromobility in Sustainable Urban Public Transport. *Energies*. 2021, roč. 14, č. 4. ISSN 1996-1073.
53. REEVES, Colin R. *Genetic Algorithms. In: Handbook of Metaheuristics*. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, sec. edition, 2010. ed. Gendreau, M., Potvin, J.Y.
54. RICE, Declan; SØDERHOLM, Torbjørn; MORTENSEN, Ole Wilhelm. Trolleybus Extension to Laksevåg. *Teknisk Forprosjekt*. 2017. Hordaland Fykeskommune.

55. RITTER, Andreas; ELBERT, Philipp; ONDER, Christopher. Energy Saving Potential of a Battery-Assisted Fleet of Trolley Buses\*\*This project is a collaboration with the industrial partners Car-rosserie HESS AG and Verkehrsbetriebe Zurich (VBZ). It is financially supported by the Swiss Federal Office of Energy (SFOE). *IFAC-PapersOnLine*. 2016, roč. 49, č. 11, s. 377–384. ISSN 2405-8963. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.08.056>. 8th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control AAC 2016.
56. ROGGE, Matthias; WOLLNY, Sebastian; SAUER, Dirk Uwe. Fast Charging Battery Buses for the Electrification of Urban Public Transport— A Feasibility Study Focusing on Charging Infrastructure and Energy Storage Requirements. *Energies*. 2015, roč. 8, č. 5, s. 4587–4606. ISSN 1996-1073. Dostupné z DOI: [10.3390/en8054587](https://doi.org/10.3390/en8054587).
57. SIMON, Marek; HURAJ, Ladislav; LUPTAKOVA, Iveta Dirgova; POSPICHAL, Jiri. Heuristics for Spreading Alarm throughout a Network. *Applied Sciences MDPI*. 2019. Dostupné tiež z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915033608>. Department of Applied Informatics, Faculty of Natural Sciences, University of SS. Cyril and Methodius in Trnava, 91701 Trnava, Slovakia.
58. *STH Ni-Cd battery range - High power for hybrid electric vehicles and automated guide vehicles* [Saft Industrial Battery Group]. 2016. France.
59. ULRYCHOVÁ, Barbora. *Simplexová metóda řešení jednoduchých optimalizačních úloh*. Plzeň, Česká republika, 2015. Dostupné tiež z: <https://otik.zcu.cz/bitstream/11025/24493/1/BP%5C%20Barbora%5C%20Ulrychova-Simplexova%5C%20metoda%5C%20reseni%5C%20jednoduchych%5C%20optimalizacnich%5C%20uloh.pdf>. Bakalárska práca. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy.
60. USHIJIMA-MWESIGWA, Hayato; KHAN, MD Zadid; CHOWDHURY, Mashrur A; SAFRO, Ilya. Optimal Installation for Electric Vehicle Wireless Charging Lanes. *Clemson University, Clemson SC, USA*. 2017. Dostupné tiež z: <https://arxiv.org/abs/1704.01022v3>. School of Computing, Department of Civil Engineering.
61. WANG, Jiang-bo; LIU, Kai; YAMAMOTO, Toshiyuki; MORIKAWA, Takayuki. Improving Estimation Accuracy for Electric Vehicle Energy Consumption Considering the Effects of Ambient Temperature. *Energy Procedia*. 2017, roč. 105, s. 2904–2909. ISSN 1876-6102. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.03.655>. 8th Interna-

tional Conference on Applied Energy, ICAE2016, 8-11 October 2016, Beijing, China.

62. XYLIA, Maria; LEDUC, Sylvain; PATRIZIO, Piera; KRAXNER, Florian; SILVEIRA, Semida. Locating charging infrastructure for electric buses in Stockholm. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2017, roč. 78, s. 183–200. ISSN 0968-090X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.03.005>.
63. YANG, S. C.; LI, M.; LIN, Y.; TANG, T. Q. Electric vehicle's electricity consumption on a road with different slope. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*. 2014, roč. 402, s. 41–48. Dostupné z DOI: [10.1016/j.physa.2014.01.062](https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.01.062).

## Príloha A: Zoznam vlastných publikácií

16. GRYGAR, Dobroslav. Exaktný prístup na návrh minimálnej siete pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov. *Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XIII, Zuberec*. 2019. ISBN: 978-80-225-6417-1.
17. GRYGAR, Dobroslav; FABRICIUS, René. An Efficient Adjustment of Genetic Algorithm for Pareto Front Determination. *Transportation Research Procedia*. 2019, roč. 40, s. 1335–1342. ISSN 2352-1465. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.07.185>. TRANSCOM 2019 13th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport.
18. GRYGAR, Dobroslav; JANACEK, Jaroslav; KOHÁNI, Michal; FABRICIUS, Rene. Two objective public service system design problem. *COMMUNICATIONS – Scientific Letters of the University of Žilina*. 2021. V tlači.
19. GRYGAR, Dobroslav; JÁNOŠÍKOVÁ, Ludmila; JANKOVIČ, Peter; KOHÁNI, Michal. Kernel Search for Overhead Wires Network Planning for Battery-assisted Trolleybuses. *Transportation Research Procedia*. 2021. TRANSCOM 2021 14th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport, V tlači.
20. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Covering of the Battery Assisted Trolleybus Fleet Schedules by Minimal Overhead Wires Network. *The 13th International Conference on Multiple Objective Programming and Goal Programming (MOPGP), Marrakech, Morocco*. 2019.
21. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Data conversion and exact approach to overhead wires network minimisation for the battery assisted trolleybus fleet. *The 15th International Symposium on Operations Research in Slovenia | 25th – 27th September 2019, Bled, Slovenia*. 2019.
22. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Generalized Location-based Linear Model for Overhead Wires Network Planning for Battery-assisted Trolleybuses. *INES, IEEE 25th International Conference on Intelligent Engineering Systems*. 2021. Podané.

23. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal. Linear model adjustment and approximate approach for creating minimal overhead wires network for vehicle schedules. *ICORES 2020 - Proceedings of the 9th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems, Pages 187-193*. 2020. Faculty of Management Science and Informatics, University of Zilina, Slovakia.
24. GRYGAR, Dobroslav; KOHÁNI, Michal; ŠTEFÚN, Rastislav; DRGOŇA, Peter. Analysis of limiting factors of battery assisted trolleybuses. *Transportation Research Procedia*. 2019, roč. 40, s. 229–235. ISSN 2352-1465. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.07.035>. TRANSCOM 2019 13th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport.



## Príloha B: Ukážka súboru s dátami

```
//Typ;ID
//Cislo linky;Cislo spoja;ID OSM startovacieho vrcholu;
//ID OSM cieloveho vrcholu;Pocet prechodov hranou;Dlzka hrany [m]

Bus;6
50;85;995486490;3761531369;50;6.31
50;85;3761531369;270507390;50;15.77
50;85;270507390;3099116890;236;17.81
50;85;3099116890;335194865;236;14.26
50;85;335194865;3099116891;236;17.66
50;85;3099116891;3099116892;236;12.01
50;85;3099116892;335571082;236;25.19
50;85;335571082;335194855;236;46.3
50;85;335194855;995490082;236;18.83
50;85;995490082;995490060;236;3.26
50;85;995490060;995502985;236;35.0
50;85;995502985;335571081;236;52.41
50;85;335571081;1973742950;236;105.01
50;85;1973742950;335571084;236;34.91
50;85;335571084;995490623;236;81.83
50;85;995490623;995490643;236;7.23
50;85;995490643;1120091449;236;10.49
50;85;1120091449;995490552;236;29.45
50;85;995490552;335571090;236;13.66
50;85;335571090;335194732;236;15.2
50;85;335194732;2026970751;236;6.13
50;85;2026970751;5186964690;236;15.98
50;85;5186964690;995486449;236;5.69
50;85;995486449;995486462;236;28.56
50;85;995486462;5186964691;236;4.04
50;85;5186964691;1846851616;236;40.38
50;85;1846851616;335195223;236;28.81
50;85;335195223;2391642900;236;37.17
50;85;2391642900;335194848;236;9.56
50;85;335194848;2391642903;236;41.07
50;85;2391642903;2391642904;236;5.68
50;85;2391642904;335195213;236;8.32
50;85;335195213;995490639;236;4.05
50;85;995490639;995490604;236;3.01
50;85;995490604;995490603;236;0.03
.
.
.
```

## **Príloha C: DVD**

Priložené DVD obsahuje text dizertačnej práce v digitálnej podobe. Ďalej dátové súbory s turnusmi vozidiel a súbory s vytvorením testovacími úlohami. Okrem toho obsahuje zdrojové kódy aplikácie na konverziu dát a heuristik v jazyku C# a zdrojové kódy modelov v jazyku Mosel.